# ВВЕДЕНИЕ

Развитие технического прогресса, науки, отношений в обществе и между государствами привело к существенному усложнению проблем, которые надо решить для успешного развития общества. Характерными чертами этих проблем является наличие большого числа факторов разной природы, влияющих на качество решения проблемы, непонятный механизм их взаимодействия, наличие большого количества случайных или неопределенных факторов. Решение таких задач классическими методами, основанными на построении математических моделей фигурирующих в проблеме объектов и полной формализацией её решения, часто весьма проблематично вследствие отсутствия знаний о законах поведения этих объектов, знания перечня факторов, наиболее существенно влияющих на качество решения проблемы.

Для решения задач такого рода возникла и развивается наука, называемая системный анализ. Она позволяет на основе общих принципов организации и функционирования любых систем – технических, экономических, социальных, биологических осуществлять проектирование вновь создаваемых систем, осуществлять анализ уже существующих систем с целью обеспечения наилучшего качества их функционирования. Одной из важных задач, решаемых при этом, является разработка математических моделей объектов исследуемой системы, для которых неизвестны законы их поведения. Осуществляется это на основе наблюдений за поведением объектов и обработке полученной информации с использованием статистических методов.

В данном учебном пособии приводятся основные сведения по системному подходу к решению задач разной природы. Рассматриваются методы получения математических моделей различных процессов и систем, подверженных действию случайных факторов, на основе измерений некоторых функций от их выходных координат.

# ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

В середине XIX века появилось большое число проектов, характерными особенностями которых являются: наличие большого числа элементов, фигурирующих в проекте, их разная природа и сложная схема взаимодействия между ними; большая степень неопределенности в описании поведения элементов проекта, многокритериальность целевой функции проекта, причем не всегда четко известны критерии и их соотношения, наличие случайных факторов, влияющих на качество выполнения проекта и его функционирование.

Использование имеющихся в то время методов проектирования и анализа таких проектов оказались малоэффективными, что вызвало развитие новых подходов, которые в настоящее время реализованы в системном анализе, занимающемся разработкой и приложением методов и моделей теории систем для анализа и проектирования систем. В процессе развития системного анализа предлагалось большое число определений системы. Одним из последних является: система − это совокупность элементов возможно различной природы, соединенных различного вида связями, обладающая определенной иерархией и предназначенная для выполнения какой-либо целевой функции.

Системный анализ наиболее эффективная и конструктивная методология проектирования и исследования сложных систем. Основным положением системного анализа является разделение рассматриваемой системы на части, анализ поведения этих частей с учетом всех связей между ними и целостности системы.

Системный анализ применяется в случаях: рассматриваемая проблема плохо формализуема и не может быть качественно решена с помощью имеющихся математических методов; постановка задачи по решению проблемы является сложным делом, требующим нестандартных подходов и решений; при решении проблемы необходимо учитывать специфические особенности системы и общесистемные принципы; в процессе анализа и проектирования системы необходимо участие специалистов разных областей знаний; ввиду сложности решаемой проблемы обязательно необходима разработка методики системного анализа, определяющей необходимые этапы решения, их последовательность и методологию; необходимо решить вопрос целевых функций в работе системы и их взаимосвязей.

Методика системного анализа разрабатывается и применяется в случаях, когда у исследователя в начале решения проблемы нет ясных знаний о системе или проблемной ситуации, поведении ее элементов и видах связей между ними, целевых функциях. Применение ее позволяет сформировать математическую модель системы или проблемной ситуации, выбрать методы формализации процессов, позволяющие получить их количественные или качественные характеристики.

Существуют различные методики системного анализа – С. Оптнера, Э. Квейда и др. Одной из последних является методика Ю. И. Черняка. Во всех методиках в разной мере присутствуют следующие этапы работ: выявление проблемы и постановка целей выполнения проекта; разработка вариантов и моделей решения проблем, возникающих при выполнении проекта; оценка альтернативных вариантов и моделей решения проблем, возникающих при выполнении проекта; оценка альтернативных вариантов решения проблем; реализация принятых решений. Так методика системного анализа Ю. И. Черняка имеет следующие этапы, их называют сферы:

1. Анализ проблемы.
2. Определение системы.
3. Анализ структуры системы.
4. Формирование цели и критерия.
5. Декомпозиция цели, выявление ресурсов и процессов, композиция целей.
6. Прогноз и анализ будущих условий.
7. Оценка целей и средств.
8. Отбор вариантов.
9. Диагностика существующей системы.
10. Построение комплексной программы развития.
11. Проектирование организации для достижения целей.

Наличие тех или иных сфер в методике зависит от решаемой проблемы и составляющих ее элементов. Каждую сферу можно разложить на более мелкие компоненты – страты, позволяющие более качественно решить проблему. Согласно Ю. И. Черняку, можно выделить в каждой сфере следующие уровни страт:

* *теоретико-множественный или концептуальный.* На этом уровне рассматриваются имеющиеся принципы и подходы, теоретические положения, используемые при решении задач рассматриваемой страты;
* *научно исследовательский.* В результате его выполнения получают методы и модели решения задач страты;
* *проектный*. Осуществляется увязка полученных решений задач страты;
* *инженерно-конструкторский*. На этом этапе осуществляют проектирование необходимых технических систем, разработку программных средств, организационных структур;
* *технологический.* Определяются организационно – технологические мероприятия по реализации принятых решений;
* *материальная реализация решаемой проблемы*. Создание необходимых объектов, программных продуктов, нормативных документов, увязка взаимодействия элементов страты системы.

Рассмотренный вариант системного анализа по Ю. И. Черняку предназначен для анализа очень сложных, плохо формализуемых или вообще не формализуемых систем. При анализе более простых систем пользуются основными этапами анализа, имеющимися во всех методичках, о которых упоминалось выше. Рассмотрим применение этого подхода на примере решения проблемы повышения качества работы организации, осуществляющей прием заявлений граждан на обслуживание какими-либо услугами.

Работа в организации осуществляется в ручном режиме при личном приходе граждан, что свойственно низкой производительности.

На первом этапе необходимо четко сформулировать проблему и определить цели проекта. В нашем примере проблема заключается в малой производительности организации вследствие больших затрат времени на обслуживание клиентов, формирования графика посещения бригадами заявителей, создание архива выполненных работ, получение информации о наличии требуемых материалов на складе. Поэтому целью проекта является разработка и создание системы обслуживания, выполняющую требуемый объем работы за меньшее время.

При рассмотрении первого этапа надо ответить на следующие вопросы (страты):

* концептуальное осмысление путей решения проблемы. В нашем примере ясно, что без использования вычислительной техники и информационных технологий решить проблему невозможно;
* второй стратой является ответ на вопрос о научно-исследовательском обеспечении решаемой проблемы. Для решения рассматриваемой проблемы необходимо наличие ЭВМ, объединенных в сеть, программное обеспечение, работы по разработке информационных систем. Все эти необходимые элементы имеются.
* третью страту можно объединить с четвертой в нашей задаче вследствие ее невысокой сложности, т.е. надо ответить на вопрос о необходимости проектных и инженерно-конструкторских работ.

Для внедрения автоматизированной системы необходимо изменение структуры организации, введение нового подразделения, занимающегося обслуживанием вычислительной техники, базы данных, программного обеспечения. Необходимо организовать обучение персонала работе с системой. Необходимо выделение финансовых средств на покупку технического оборудования, введение новых должностей для обслуживания информационной системы. Необходимо выделение финансовых средств для разработки конкретной реализации проекта в организации и проведение работ по установке и наладке всего оборудования.

* в пятой страте отвечают на вопрос о том, что нужно готовить документы на изменение структуры организации, ее личного и должностного состава.
* в шестой страте определяют количество требуемых финансовых средств.

Вторым этапом решения проблемы является детальное определение системы. Так как система несложная, то этот этап можно объединить с третьим, анализ структуры.

На этом этапе отвечаем на вопросы следующих страт:

* концепция системы. Система должна обеспечить прием заявок как через операторов организации при личном присутствии заявителей, так и с использованием средств удаленного доступа – телефон, компьютер. Конкретизируется количество новых служб, их названия и должностные обязанности;
* вторая страта – научно-исследовательская работа. Здесь необходимо ответить, что работ по созданию информационных систем большое количество и необходимо выбрать тип системы – локальная или сетевая. Так как мы хотим обеспечить удаленный доступ при подаче заявок, то система должна быть сетевой, связанной с интернетом, иметь единый сервер для обслуживания как поступающих заявок, так и баз данных для них, для финансовой документации организации, документации по материальным средствам, хозяйственной деятельности и т.д. Необходимо предусмотреть уровни доступа к разного вида информации сотрудников организации, а также защиту информации;
* третью и четвертую страту также можно объединить. При ответе на их вопросы определяют типы используемых ЭВМ и необходимого оборудования. Типы связей между ними, места установки ЭВМ и прокладки кабелей.
* пятая страта. Разрабатывают новые документы по должностным обязанностям персонала, уровню образования и знаний при работе с информационной системой.
* шестая страта. Осуществляют закупку необходимого оборудования, программного обеспечения.

Следующим этапом является формирование цели и критерий. В нашем случае цель была поставлена при формулировке проблемы – сокращение времени обработки заявок. Кроме этой первоначальной цели в процессе создания системы может возникнуть дополнительная цель – в нашем случае это уменьшение количества персонала в организации за счет использования информационных технологий. Достижение этой цели можно осуществлять в рамках первоначальной за счет использования информационных технологий для замены ручных технологий – ведение журналов учета прихода и расхода материалов и т.д.

Из оставшихся этапов рассмотрим этап отбор вариантов и диагностика существующей системы. Остальные этапы необходимо рассматривать при решении сложных, плохо формализуемых задач. Причем, учет того или иного этапа осуществляют исходя из конкретной рассматриваемой задачи.

На этапе отбора вариантов осуществляют выбор конкретного варианта для внедрения. В нашем случае он определен на этапах определения и анализа системы. На этом этапе осуществляют построение выбранной системы.

На этапе диагностики осуществляют диагностирование созданной системы в различных режимах – отдельных элементов, отдельных подсистем, всей системы. Проверяют работу системы защиты информации.

Необходимо отметить, что системный анализ проблемы необходимо осуществлять не привязываясь жёстко к той или иной методике, а учитывать её те или иные этапы и страты исходя из решаемой проблемы.

При анализе и проектировании новой системы необходимо учесть общие принципы системного анализа, позволяющие более полно проанализировать имеющуюся систему, или создать новую.

1. Принцип конечной цели.

Он подразумевает, что все процессы в системе должны быть подчинены конечной цели. В случае неясности конечной цели создаваемой системы качество её функционирования существенно снижается. В случае нескольких целей их необходимо ранжировать.

1. Принцип единства и связи.

Он позволяется рассматривать систему как совокупность элементов, связанных между собой, образующих единую систему. Это означает, что в системе не должно быть автономных элементов, не связанных с другими и не выполняющих функций, ведущих к решению поставленной перед системой задачи.

1. Принцип иерархии.

Согласно этому принципу при анализе существующих систем необходимо определить иерархию (доминирование) существующих в ней процессов и явлений. А для искусственных систем проанализировать, какая иерархическая структура обеспечивает более высокое качество функционирования системы. Степень централизованности системы влияет на её естественное развитие. При слабой централизации возможно появление новых элементов, связей, технологий, родившихся на нижних уровнях иерархии системы, в коллективах сотрудников организации, и ведущих к повышению качества функционирования системы, её развитию. при жёстко централизованной системе все процессы и изменения в ней определяются на самом верхнем уровне, который не обладает всей информацией о положительных и отрицательных моментах в работе элементов нижнего уровня, не может оценить их влияние на эффективность работы системы. Поэтому применяемые на верхнем уровне решения могут не повысить качество работы всей системы, а даже привести к его ухудшению.

На выбор степени централизации системы влияют условия, в которых она функционирует. В случае особых условий, так называемых форсмажорных, (война, стихийное или техногенное бедствие и т.д.) наибольшую эффективность управления даёт жёсткая централизация, направленная на преодоление главной опасности, объединение всех ресурсов только для этой цели. В этот период не происходит саморазвитие системы, или происходит слишком медленно.

В нормальных условиях, т.е. при отсутствии форсмажорных обстоятельств, более эффективна нежёсткая централизация управления, позволяющая появляться новым решениям на всех уровнях системы, ведущим к повышению качества её функционирования, т.е. к саморазвитию.

1. Принцип функциональности.

Он означает, что структура системы тесно связана с целью, для которой система проектируется. Структура системы является производной от цели системы. Поэтому разработка или анализ структуры системы можно осуществлять только после четкого определения цели, для которой проектируется система. В этой связи при изменении цели систем часто бывает целесообразно изменить структуру системы, чем пытаться приспособить старую систему для новой цели.

1. Принцип развития.

Он означает, что любая система, условия в которых она функционирует, претерпевает изменения. Поэтому при проектировании сложной системы необходимо предусмотреть возможность её безболезненного перестроения, расширения приспособления к изменяющимся условиям. В этом случае одним из способов обеспечения этого принципа является модульность структуры.

1. Принцип децентрализации.

Согласна ему при проектировании системы должно быть обеспечено рациональное сочетание централизации и децентрализации. Сильно централизованная система делается не гибкой, плохо приспосабливающейся к изменяющимся условиям. Сильно децентрализованная система не позволяет выполнить цель, для которой она предназначена. Этот принцип схож с принципом иерархии.

1. Принцип неопределенности.

Согласно этому принципу при анализе и проектировании системы должны учитывать случайности и неопределенности, влияющие на поведение системы. В качестве их могут быть непонятная структура, не выявленные связи, внешние непрогнозируемые факторы.

В зависимости от вида системы учет этих случайностей может осуществляться в виде выделения финансовых средств на непредвиденные случаи для финансово-экономических систем, для технических систем это осуществление дублирования узлов и блоков системы, проектирование систем, рассчитанных при работе на «дурака».

Одной из важных задач системного анализа является получение модели разрабатываемой или имеющейся системы с целью анализа ее поведения при разных условиях.

При анализе функционирования системы, которая только проектируется или уже существует, наиболее лучшим, с точки зрения информативности о поведении системы в разных ситуациях, является использование математической модели этой системы. При проектировании технических систем, состоящих из элементов, поведение которых подчиняется законам физики, поведение всей системы описывается в общем случае дифференциальными уравнениями. Решая эти уравнения при разных начальных условиях и параметрах, можно сделать выводы о качестве работы будущей системы.

При анализе функционирующих сложных систем, элементами которых являются плохо формализующие объекты – экологические, социальные, экономические, а также технические, для которых неизвестна математическая модель поведения, получение полной аналитической математической модели такой сложной системы весьма проблематично. Поэтому в этом случае используют математические модели, построенные на основе наблюдений за поведение системы. при этом возможны два подхода: первый, когда исследователь может иметь режим работы системы в соответствии с планом эксперимента, с целью получения больше информации о внутренней структуре системы. Такой эксперимент называют активным;

Второй подход, он называется пассивным экспериментом, характерен тем, что экспериментатор не может вмешиваться в работу системы. Тогда он может получить информацию о системе, работающей, обычно, в некотором штатном режиме. Такой подход обладает меньшей информативностью о структуре системы и полученная с его использованием математическая модель обладает меньшей адекватностью.

В качестве информации о поведении системы, но основании которой строится её математическая модель, может быть вектор измерений всех её выходных переменных или части, в разные моменты времени, либо некоторой функции от выходных координат. Замеренный в эксперименте специальной аппаратурой вектор измерений содержит случайные ошибки, влияющие на точность получаемой математической модели. С целью снижения этого влияния – повышения точности модели, используют методы теории вероятности и математической статистики.

# ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Опыт − наблюдение какого-либо явления при выполнении некоторого комплекса условий и действий, которое должно каждый раз выполняться при повторении данного опыта.

Результаты опыта бывают качественными и количественными: первые состоят в регистрации (появлении) какого-либо события в результате опыта. Событие может произойти или не произойти в опыте. Например: отказ прибора при работе в течение n часов работы; возникновение пожара при грозе и т.д. Количественная характеристика опыта состоит в определении числовых значений некоторых величин, полученных в результате опыта. Такие величины, могущие принимать в результате опыта различные значения, причем до опыта невозможно предвидеть, какими они будут, называются случайными величинами. Например, величина напряжения в электрической сети в данный момент времени; координаты точки падения снаряда; число людей, заболевших за месяц, и т.д.

Случайные величины бывают скалярные и векторные. В свою очередь эти величины могут быть дискретные и непрерывные. Рассмотрим последние. Возможные значения случайной величины *Х* задают функцией распределения, которой называют вероятность неравенства *Х<х*, рассматриваемую как функция параметра х:

*F*(*x*)*=P*(*X<x*)*.*

Для скалярной случайной величины функция распределения может иметь вид, представленный на рис.1



Рис. 1. Функция распределения случайной величины

Если мы зададим величину , то задаст вероятность того, что значение случайной величины Х попадет в интервал

.

Свойства функции распределения скалярной величины:

неубывающая:

.

Другой, более часто используемой характеристикой случайных величин, является функция плотности вероятности *f*(x) (рис.2). Для получения ее рассмотрим предел отношения вероятности попадания значения х в интервал [*x, x*+*x*] к длине этого интервала при *х* 0:

Так как ,

то

Этот предел существует и является производной функции *F*(*x*)*.* Таким образом,. Она всегда положительно определена.

Вероятность попадания в интервал [,] равна

и графически представляет собой заштрихованную площадь (рис. 2).



Рис. 2. Функция плотности вероятности случайной величины

Можно записать приближенно равенство

где .

Вероятность попадания в интервал [] равна 1,

т.е.

.

В случае векторной величины *Х* размерности n имеем зависимости

*F*() =

Наиболее полной характеристикой случайной величины является закон распределения, задаваемый функцией распределения или функцией плотности вероятности. Однако использовать эти функции при расчетах не всегда удобно, часто они не известны. Поэтому наиболее широко используют характеристики случайных величин.

Будем для обозначения операции вычисления математического ожидания случайной величины использовать символ *М.*

Математическим ожиданием случайной величины *Х* является интеграл

а математическим ожиданием функции случайного аргумента

Cвойства математических ожиданий:

Отсюда имеем частные случаи

**Моменты второго порядка**

Центрированной случайной величиной называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием. Обозначим ее

.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее центрированной случайной величины

Cредним квадратическим отклонением случайной величины *Х* называется корень квадратный из ее дисперсии

.

Величина характеризует разброс случайной величины *Х* относительно математического ожидания.

Корреляцией или ковариацией случайных величин называется математическое ожидание от произведения их центрированных случайных величин

.

Здесь –двумерная функция плотности вероятности величин .

Корреляция является мерой линейной статистической связи между двумя случайными величинами. Это значит, что если корреляция не равна нулю, то изменение одной величины ведет к изменению другой. Чем более жесткая зависимость, тем уже область разброса случайных величин (рис.3.).



Рис. 3. Корреляционные зависимости случайных величин

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

*.*

Однако, если корреляционный момент равен нулю, то это еще не значит, что случайные величины независимы. Например, имеем величины они связаны функциональной, самой жесткой зависимостью. Пусть распределена по равномерному закону на интервале . Тогда

,

Мы получили, что корреляционный момент зависимых величин равен нулю. Дело в том, что корреляционный момент дает линейную зависимость, а в рассмотренном случае она не линейна.

Если имеем вектор центрированных случайных величин

, то корреляционный момент компонент вектора определяется корреляционной матрицей

Произведение векторов называют внешним векторным произведением. Если случайные величины *Х* некоррелированы, то

.

Корреляционная матрица всегда неотрицательно определена. Покажем это. Имеем

Образуем квадратичную функцию

,

где *U* − вектор переменных.

Можно записать

Мы получили, что значение квадратичной функции равно математическому ожиданию от квадрата произведения векторов, который всегда больше или равен нулю.

**Нормальный закон распределения**

Для проведения вероятностных расчетов необходимо знать закон распределения случайных величин. В курсе теории вероятности исследуются различные законы. Наиболее распространенным и широко используемым при расчетах является нормальный закон. Он имеет вид

,

где *х* − вектор случайных величин размерности *n*; – корреляционная матрица; − математическое ожидание вектора *х*.

Эта функция представляет собой «шляпу», максимальное значение ее достигается при

Широкое использование при расчетах этого закона объясняется тем, что случайные процессы, зависящие от большого числа случайных факторов, имеющих степень влияния на процесс одного порядка, описываются нормальным законом. Это следствие центральной предельной теоремы.

# ДАТЧИКИ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Для получения случайных чисел, используемых при моделировании на ЭВМ, применяют датчики случайных чисел, причем вначале получают случайное число, распределенное по равномерному закону в интервале [0,1], а затем, используя его, случайную величину, имеющую заданный закон.

Для получения реализации равномерно распределенной случайной величины применяют два принципа: физический и алгоритмический.

Физический основан на использовании случайных физических явлений, например, потоков частиц, испускаемых радиоактивным веществом, собственных шумов радиоламп. Чувствительный элемент воспринимает сигнал, принимающий значения 1 или 0 в зависимости от уровня шума. Получив ряд случайных двоичных величин, вычисляют значение десятичной случайной величины *V* по формуле

Предельные значения данной случайной величины V равны 0 и 1. Действительно, если все =0, то V=0. Если =1, то имеем геометрическую прогрессию

Для которой

Доказано, что если вероятность появления 1и 0 одинакова, то случайная величина *V* распределена по равномерному закону. Такой датчик случайных чисел генерирует неповторяющуюся случайную последовательность.

При алгоритмическом способе случайные числа получают путем выполнения операций над числами. Строго говоря, такие числа не являются случайными, т.к. при каждом новом обращении при решении задачи они дают ту же случайную последовательность, что и в предыдущем обращении. Поэтому их называют псевдослучайными. Самый первый алгоритм получения псевдослучайных чисел предложен Нейманом. Алгоритм состоит в следующем: берут произвольное число, допустим

,

возводят в квадрат

,

отбрасывая две крайние цифры слева и справа, получают случайное число опять возводят в квадрат .

Получаем

и отбрасывают крайние две цифры. Получают новое случайное число

и т. д.

Удобства этого способа:

1. На получение числа затрачивается несколько простых операций, поэтому скорость нахождения псевдослучайных чисел имеет тот же порядок, что и быстродействие ЭВМ.
2. Программа для вычисления занимает очень мало места.
3. Используемую программу для получения псевдослучайных чисел достаточно проверить один раз на соответствие требуемому закону, и потом ею можно пользоваться сколько угодно раз.

Рассмотрим датчик случайных чисел, распределенных по равномерному закону, использующий другой, более удобный в программировании алгоритм. Он следующий: сначала задают два иррациональных числа

*А*=3,14159265 , *В*=0,542101887.

и находят сумму

.

Если , то , если , то *S*=.

Случайное число вычисляем по формуле

.

Изменяем значения *А* и *В* на новые: *А*=*В*, *В*=*S.* Эти переменные *А* и *В* запоминаются и при следующем обращении к датчику случайных чисел используют уже эти новые значения *А* и *В*.

Таким образом, при использовании датчика случайных чисел необходимо задать вначале перед первым обращением указанные значения переменным *А* и *В*. Новые значения эти переменные получат в подпрограмме.

Теперь рассмотрим, как, имея случайную величину *V*, распределенную по равномерному закону на интервале [0,1], получить случайную ξ, имеющую требуемую плотность вероятности на интервале [a,b].

Докажем, что ξ надо находить из уравнения

т.е., получив очередное значение *V* надо решить записанное выше уравнение. вычисленное **ξ** и будет случайной величиной, распределенной по требуемому закону. Для доказательства необходимо показать, что

для любого интервала

Вспомним, что интеграл

есть функция распределения, обладающая свойствами и, кроме того, монотонно возрастающая на интервале [*a,b*] (рис. 4).



Рис. 4. Функции распределения случайных величин

Аналогично имеем и для закона распределения равномерной случайной величины *V*:

.

Поэтому любая прямая *F*=*V* пересекает в одной точке, аб- сцисса которой ξ и является требуемой случайной величиной (рис. 4).

Выберем произвольный интервал [] , содержащийся в [*a,b*]. Точкам этого интервала соответствуют точки интервала оси *F,* удовлетворяющие неравенству

Поэтому, если **ξ** принадлежит интервалу [], то *V* принадлежит интервалу [] и наоборот (см. рис.4).

Значит,

.

Так как *V* равномерно распределена на [0,1] и функция распределения есть прямая линия, проходящая через начало координат под углом , абсциссы и ординаты точек которой равны, то

.

Таким образом, получили требуемую зависимость

,

свидетельствующую о том, что функцией плотности вероятности случайной величины является , что и следовало доказать.

Рассмотренный способ позволяет получать случайные числа, распределенные по любому закону, имея датчик равномерно распределенных чисел в интервале [0,1].

Как уже говорилось, наиболее часто используют в расчетах нормальный закон распределения. Соответствующие ему случайные числа можно получить рассмотренным способом. Однако на практике с целью сокращения объема вычислений используют другой способ, основанный на центральной предельной теореме. Она гласит, что при сложении достаточно большого числа случайных величин, распределенных по любому закону, получается случайная величина, распределенная примерно по нормальному (гауссовскому) закону. Исследования показали, что при сложении уже шести случайных величин, распределенных по равномерному закону, получается случайная величина, которую можно считать распределенной по нормальному закону. Поэтому в подпрограмме датчика нормально распределенных случайных величин используется вычисление шести равномерно распределенных случайных величин величин.

Покажем, как получить гауссовскую случайную величину с и .

Пусть − независимые равномерно распределенные на интервале [0,1] случайные величины. Тогда

Так как то =3.

Найдем величину дисперсии для :

.

Так как случайные величины и некоррелированы, то

и получаем

.

Мы получили, что случайная величина смещена на 3 и имеет

.

Для того, что получить случайную величину с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, пронормируем , т.е. перейдем к новой величине

.

Для получения случайной величины *W* с математическим ожиданием α и дисперсией необходимо умножить на и прибавить α:

В подпрограмме датчика случайных чисел, распределенных по нормальному закону, необходимо перед первым обращением также задать значения переменных

*А*=3,14159265, *В*=0,542101887

и, кроме того, при обращении задавать значение дисперсии требуемой случайной величины.

# ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из упорядоченных элементов:

.

Элементами таблицы могут быть действительные или комплексные числа или функции от заданных переменных. Элементы матрицы записываются при помощи двойного индекса. Первый указывает номер строки, на котором расположен элемент, а второй-номер столбца. Матрица, содержащая *m* строк и *n* столбцов, называется (*mn*)-матрицей. Матрица (*m*1) называется матрицей-столбцом или вектором-столбцом. Матрица (*In*), содержащая одну строку, называется матрицей-строкой или вектором строкой.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, диагональные элементы которой равны единице.

Симметричной матрицей называется такая матрица, у которой

.

Транспонирование матрицы *А* − операция, при которой ее строки и столбцы меняются местами. Транспонированная матрица *А* обозначается .

Сложение матриц. Если матрицы *А* и *В* одного порядка (*mn*), то суммой этих матриц служит матрица

*С* =*А* + *В*,

элементы которой определяются как

.

Сложение матриц коммутативно и ассоциативно, т.е.

*А* + *В* = *В* + *А*,

*А + (В + С) = (А + В) + С.*

Вычитание матриц. Разность матриц А и В одного порядка равна матрице

*D = A − B,*

Элементы которой равны

.

Умножение матриц. Произведением матриц *А* (*m*) и В (*np*) является матрица

*С=АВ*,

размером (*mp*), элементы которой определяются по формуле

.

Умножение матриц ассоциативно

*А(ВС) = (АВ)С,*

дистрибутивно

*А(В + С) = АВ + АС,*

*(А + В)С = АС + ВС*,

в общем случае некоммутативно

.

Транспонирование произведения матриц равно произведению транспонированных матриц в обратном порядке

.

**Операции с блочными матрицами**

Иногда удобно представить исходную матрицу в виде элементов, являющихся подматрицами исходной матрицы. Например, проводя вертикальную и горизонтальную пунктирные линии на матрице А размерности (33), можно представить матрицу А в виде матриц

где

Если подобным образом разделена и матрица *В* размерности (33),

то сумма этих матриц равна

,

а произведение

.

При использовании блочных матриц подматрицы, участвующие в операции, должны быть согласованы по размерам.

Обратная матрица. Матрицей, обратной для матрицы *А* (*mm*), обозначаемой , является матрица, удовлетворяющая условию

где *I* − единичная матрица.

Операция умножения прямой и обратной матриц коммутативна, т.е.

Обратная матрица существует только для невырожденных матриц, т.е. для таких, у которых .

**Обращение произведения матриц**

Дано произведение матриц

*С=АВ.*

Умножим левую и правую части исходного произведения слева на и справа на

отсюда

.

**Внешнее произведение векторов**

Если *А* − вектор-столбец размерности (), а *В* − вектор-строка размерности (), то внешним произведением этих векторов является матрица

*АВ*=.

**Решение системы линейных уравнений**

Если система задана в матричном виде

*АХ=В,*

где *А* − матрица размера (), *Х* − вектор неизвестных размера ; *В* − вектор правых частей размера , то в матричном виде решение равно

.

**Дифференцирование квадратичной формы**

Найдем зависимости для дифференцирования квадратичной формы

,

где − вектор-столбец размерности , компоненты которого зависят от вектора размерности *K*; *А −* матрица коэффициентов размерности ().

Обозначим

Тогда

и

+

Обозначим

Имеем

Тогда

Если матрица *А* симметрична, то

.

# ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ

# УРАВНЕНИЙ

Во многих задачах управления движением, фильтрации сигналов, идентификации разработанные методы наиболее просты в реализации в том случае, если поведение объекта описывается линейным дифференциальным уравнением. Если поведение объекта описывается нелинейным уравнением, то необходимо осуществить линеаризацию.

Линеаризация − это замена исходного нелинейного дифференциального уравнения линейным так, чтобы погрешность его решения была незначительной.

Вспомним курс вычислительной математики, в частности, решение нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона. Он заключается в том, что линеаризовали нелинейное уравнение, т.е. заменяли нелинейную функцию линейной в окрестности некоторой точки. Точно так же осуществляют линеаризацию нелинейного дифференциального уравнения, только ее осуществляют в окрестности не точки, а некоторого опорного решения.

Допустим, имеем нелинейное дифференциальное уравнение

Начальные условия его могут быть произвольны, но известно их математическое ожидание при . Реальное движение происходит в окрестности движения, заданного начальным условием.

Заменим нелинейное уравнение линейным. Обозначим решение нелинейного уравнения при заданных начальных условиях, назовем его опорным, через ,а при отличных от заданных − через . Тогда имеем

Отклонение решения y(t) от опорного определяется зависимостью

Правую часть этого уравнения можно приближенно, используя линейные члены разложения, представить в виде

Обозначим x=. Тогда имеем дифференциальное уравнение для отклонения от опорного вследствие отличия начальных условий от опорных

Так как частная производная теперь зависит от функции , времени t и не зависит от решения дифференциального уравнения, то

и является переменным коэффициентом линейного дифференциального уравнения. Введем обозначение . Тогда уравнение примет канонический вид

Решая его, получим значение x, задающее отклонение от опорного вследствие отличия начальных условий от опорных. Начальные условия для этого уравнения равны при , где − фактическое значение начальных условий. Если , то начальные значения и имеем нулевое решение линейного уравнения.

Решение нелинейного уравнения можно представить в виде

.

Из изложенного метода видно, что для получения приближенного решения вначале нужно решить нелинейное уравнение при опорном начальном условии и запомнить его решение в ряде точек .

При решении линейного дифференциального уравнения значения в произвольных точках вычисляют интерполяцией.

**Пример.** Дано нелинейное уравнение

с начальными условиями опорного решения при и начальными условиями действительного движения при .

Матрица коэффициентов линеаризованной системы

.

Линеаризованная система дифференциальных уравнений имеет вид

где − решение исходной нелинейной системы уравнений при начальных условиях при .

Начальные условия линеаризованной системы при .

Полученное линейное уравнение можно решить методом разделения переменных:

Или

.

Отсюда получим решение:

*X*=

# МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Рассмотрим следующую задачу. В гравитационном поле Земли движется по баллистической траектории, т.е. без двигателя, под воздействием гравитационной и аэродинамической сил неизвестный объект. Находящаяся на Земле радиолокационная станция (РЛС) измеряет в заданные моменты времени расстояние до объекта. Измерения производятся каждый раз со случайной ошибкой , распределенной по нормальному закону. Математическое ожидание ошибки равно нулю, дисперсии и взаимосвязь погрешностей известны и определяются корреляционной матрицей

.

Определить по этим измерения параметры движения объекта (координаты и скорости) в некоторый момент времени , чтобы спрогнозировать его дальнейшее положение по известным дифференциальным уравнениям движения объекта.

Гравитационное поле считать центральным, Землю не вращающейся, РЛС находится в плоскости движения объекта.

Для решения задачи необходимо ввести систему координат, в которой будем описывать движение объекта и зададим положение РЛС. Это может быть любая система. Мы введем центральную систему ОХУ (рис. 5).



Рис. 5. Система координат

Обозначим вектор определяемых параметров объекта в момент времени , а это скорости и координаты *х*, *у*, через , т.е. . Вектор измеряемых параметров *R* через

.

Здесь – точное значение расстояния до объекта; – погрешности измерения.

Необходимо определить неизвестные параметры по случайному вектору *R*. Компоненты его при разных реализациях измерений (т.е. измерения такого движения но в разное время суток, года, при разных климатических условиях) будут разными вследствие случайности погрешности *V*, которую мы никогда не знаем. Знаем только ее вероятностные характеристики. Поэтому вычисленное значение определяемых параметров по вектору *R* будет случайной величиной. Точного значения мы никогда не можем узнать. Наша задача формулируется следующим образом: оценить по данным измерений R неизвестные параметры так, чтобы погрешность этой оценке при данных погрешностях измерений *V* была минимальна.

Параметрами могут быть начальные условия для системы уравнений, описывающих процесс, какие-либо постоянные параметры процесса.

В формулировке задачи применен термин «оценить». Он всегда используется, когда не возможно определить точное значение параметра, а оно определяется с погрешностью. Потому дальше будем говорить об оценке параметров по данным измерений.

Сформулируем условия, при которых можно решить эту задачу:

1. Известна математическая модель процесса, для которого определяем по данным измерений требуемые параметры . В нашем случае этой моделью являются уравнения движения тела в гравитационном поле Земли. При этом в зависимости от требуемой точности оценок используют модели разной степени точности. Это могут быть: модель плоскопараллельного гравитационного поля; центрального; нецентрального, учитывающего аномалии гравитационного поля. При этом может не учитываться или учитываться влияние атмосферы на движение объекта.
2. Известны математические модели математического ожидания и корреляционной матрицы погрешности измерений *V*. при этом корреляционная матрица должна быть невырождена, т.е. иметь обратную матрицу. Для простоты будем считать, что .
3. Ошибки измерений *V* распределены по нормальному закону. Это условие в общем случае может не выполняться, т.е. закон распределения отличаться от нормального, но тогда будет больше погрешность оценки параметров.
4. На объект, процесс для которого оцениваем параметры , во время его движения, протекания не действуют случайные возмущающие факторы.

Рассмотрим метод максимального правдоподобия.

Так как мы имеем математическую модель движения объекта, то, используя ее, можем получить математическую модель вектора расстояний до объекта, зависящего от оцениваемых параметров. Обозначим его

.

Здесь математическая модель расстояния в момент времени , расстояние в момент времени , и т.д.

Рассмотрим разность вектора измерений и его математической модели, вычисленной для некоторого :

Вектор *R* является случайной величиной с математическим ожиданием

и корреляционной матрицей, равной корреляционной матрице вектора *V*, т.е. . Вектор *R*, как и вектор *V*, распределен по нормальному закону. Поэтому можем написать

Полученная функция условной плотности вероятности зависит от вектора оценок и задает плотность вероятности отклонения измеренного вектора *R*=*D*+*V* при его математическом ожидании, вычисленном по модели . Значение этой функции зависит от вектора оцениваемых параметров . При одном значение будет одним, при другом другим. Нам необходимо найти такое, чтобы была максимальной, т.е. подставленное соответствовало бы максимальной плотности вероятности измеренного вектора *R*.

Если вектор измерений состоит из *N* компонент (), то максимум функции условной плотности вероятности достигается при минимуме выражения

*,*

представляющего неотрицательно определенную квадратичную форму.

Теперь необходимо найти,при котором *I* достигает минимума. Вследствие того, что зависимость в большинстве задач является нелинейной, вычисление минимума I осуществляется численным методом. Воспользуемся необходимым условием минимума: в точке минимума частные производные (*i*=1, 2,…,*K*) равны нулю. Ввиду того, что матрица симметрична, частные производные

Отсюда получаем систему *K* уравнений для вычисления *K* компонент оценки

Это уравнение называется уравнением правдоподобия. Полученное условие является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для получения минимума.

Для решения этой системы уравнений наиболее часто используют метод Ньютона, основанный на линеаризации функции относительно заданного значения в ряд Тейлора с учетом только линейных членов разложения:

или

Здесь обозначена через *L* матрица первых производных, вычисленная при . Подставим эту зависимость в уравнение правдоподобия. Получим

или

где .

Окончательно получим систему линейных уравнений относительно :

Так как произведение является квадратной матрицей, то можем записать

Получили формулу для вычисления величины подшагивания при нахождении оценки вектора определяемых параметров .

Вычислив первое , определяют

и вычисляют новые значения матрицы первых производных *L* при , новое значение вектора и новое значение подшагивания и т.д. вычисления осуществляются до тех пор, пока величина невязки, т.е. модуль разности правой и левой части уравнений или приращение , не станет меньше заданной величины.

Полученное значение и является требуемой оценкой параметров.

Величину на каждой итерации можно вычислить только в том случае, если матрица () обратима, т.е. не вырождена. Обратимость ее является условием наблюдаемости системы.

Наблюдаемость системы – это возможность вычислить ее оцениваемые параметры по результатам измерений какой-либо функции от этих параметров. Наблюдаемость системы зависит, в основном, от количества и состава измеряемых параметров, геометрии измерений, моментов времени измерений.

Например, в нашем случае мы измеряем расстояния от объекта до станции и по ним оцениваем параметры движения. Если сделаем одно измерение расстояния, то не сможем определить по нему параметры движения, т.к. одному расстоянию соответствует бесконечное множество решений уравнения, удовлетворяющих этому расстоянию в момент измерения. По двум, трем измерения тоже нельзя определить, т.е. система при таком количестве измерений ненаблюдаема. При четырех измерениях уже можно как-то оценивать неизвестные параметры, а еще лучше это будет сделано при большом числе измерений 50…100…200.

На наблюдаемость влияет интервал между измерениями. Если измерения проводить через микросекунду, за которую тело пройдет 10…20 м, и ограничиться небольшим числом измерений (10…15), то велика вероятность того, что система будет ненаблюдаема, т.е. матрица будет плохо обусловлена.

Состав измерений может быть различным. В этой задаче использовали расстояния до объекта. А можно измерять не расстояние, а, например, угловое положение объекта в некоторой системе координат или радиальную скорость, или все параметры одновременно.

**Точность оценки**

Как уже говорилось, определение неизвестных параметров, т.е. оценка, производится с некоторой погрешностью, которая, в частности, зависит от погрешности измерений, нам неизвестной, а также от алгоритма оценки, который можно выбрать по своему усмотрению. Поэтому возникает вопрос о выборе в некотором роде оптимального алгоритма оценки, который должен удовлетворять следующим свойствам.

1. Получаемая из уравнения правдоподобия оценка должна быть однозначной, т.е. уравнение должно иметь одно решение.
2. Оценка должна быть несмещенной. Разберем подробнее этой свойство. Получаемая оценка вычисляется на основании измерений (i=1, 2,…,N), являющихся случайными величинами, и сама является случайной величиной:

.

Поэтому можно вычислить математическое ожидание оценки

Или в сокращенном виде

Если равно истинному значению оцениваемых параметров, т.е.

то оценка является несмещенной. Свойство несмещенности означает, что полученные оценки в разных экспериментах будут располагаться вокруг неизвестного истинного значения оцениваемого параметра.

Рассмотрим пример из математической статистики.

Проведены *N* измерений случайной величины *V*, имеющей математическое ожидание и дисперсию . Осуществляется оценка ее математического ожидания и дисперсии по формулам:

Являются ли полученные оценки смещенными? Вычислим математическое ожидание от :

Таким образом, математическое ожидание от оценки равно точному математическому ожиданию, т.е. оценка несмещенная.

Вычислим математическое ожидание от .

Возведем в квадрат выражение в круглых скобках:

Вычислим математическое ожидание от первого слагаемого:

Вычислим математическое ожидание от второго слагаемого:

Так как случайные величины () некоррелированы, то

Поэтому имеем

Окончательно для второго слагаемого получим

Вычислим математическое ожидание от третьего слагаемого.

Для математического ожидания оценки среднеквадратического отклонения получим

Эта формула показывает, что оценка получается смещенной, величина смещения зависит от числа случайных величин *N* и особенно велика при малом числе *N*. Для получения несмещенной оценки первоначальную формулу оценки дисперсии надо умножить на. В этом случае оценка будет иметь вид

В математической статистике доказывается, что оценка неизвестных параметров по данным измерений методом максимального правдоподобия будет несмещенной, если:

1. Используется линейная математическая модель наблюдений, т.е.

вектор наблюдений; *А* − постоянная матрица ; вектор оцениваемых параметров размерности *K*;

вектор шумов (случайных параметров) размерностью *N*.

Такого вида модели могут использоваться и для нелинейных моделей. В этом случае осуществляют линеаризацию исходной нелинейной модели по оцениваемым параметрам. При этом необходимо проверить, чтобы погрешность линеаризации в области возможных значений оцениваемых параметров была несущественна;

2. Погрешность *V* измерений является гауссовской несмещенной, т.е. *M*[*V*]=0, некоррелированной, т.е. и равноточной, т.е.

3. Выбор алгоритма обработки информации осуществляется на множестве всех линейных несмещенных алгоритмов вида

где матрица, подлежащая определению.

В большинстве практических задач зависимость между вектором оцениваемых параметров и вектором измерений является нелинейной, а закон распределения погрешностей *V* отличным от нормального. В этом случае оценка является смещенной. Однако, несмотря на это, метод максимального правдоподобия успешно используется и в таких задачах, что связано с самим принципом метода, заключающимся в нахождении максимума функции плотности вероятности. При этом необходимо проверить имеющуюся информацию (вектор наблюдений) на наличие грубых, аномальных измерений.

**Эффективность оценок**

Рассмотрим дисперсии погрешностей оценки неизвестных параметров , вызванных погрешностями измерений. Оценку мы находим из системы уравнений

используя для этого полученную их этой системы линеаризованную зависимость

Эта последняя формула дает величину подшагивания при вычислении оценки . Допустим, что мы знаем точное значение , обозначим его . Величина задает погрешность измерений, обозначим ее как и ранее

Так как то Тогда формула

где матрица *L* вычислена при , задает погрешность оценки вектора неизвестных параметров вследствие погрешности измерений *V*. В частности, если *V*=0, то и .

Вычислим корреляционную матрицу погрешности , обозначим ее через . При вычислении используем внешнее произведение векторов

Транспонированный вектор определяется зависимостью

.

Обозначим огда

.

Вычислим математическое ожидание этого выражения, являющееся корреляционной матрицей и задающее погрешность оценки вектора .

В правой части этого выражения случайной величиной является *V*. Поэтому имеем

.

Мы приняли, что погрешности измерений *V* распределены по нормальному закону. Тогда

.

Используя это, получим

Воспользуемся симметричностью матриц . Тогда

Подставим в формулу для

Так как (единичная матрица), то

Мы обозначили

Тогда

Или

Полученная формула позволяет оценить корреляционную матрицу погрешностей оценки вектора неизвестных параметров вследствие погрешностей измерений, задаваемых корреляционной матрицей. Формула была получена при условии, что известно точное значение оцениваемых параметров. На самом деле мы его не знаем, поэтому на практике значение матрицы производных *L* для определения вычисляют при полученной оценке . Это дает некоторую погрешность в оценке .

Для чего нужна оценка ?

При определении параметров по данным измерений стараются получить как можно более точную оценку, т.е. как можно с меньшей дисперсией. Величина дисперсии зависит от метода обработки измерительной информации (мы рассматриваем сейчас метод максимального правдоподобия), вида измеряемой информации (можно мерить расстояние, как в нашей задаче, либо угловое положение, радиальную скорость и т.д.), количества измерительных пунктов и их расположения, выбора моментов замера и их числа.

В математической статистике доказывается формула Крамера-Рао, показывающая, что корреляционная матрица погрешностей оценки , вычисленная по данным измерений, не может быть меньше определенной величины:

где

– функция условной плотности вероятности случайного вектора наблюдений R при заданном векторе оцениваемых параметров .

Данное неравенство справедливо для несмещенной оценки .

Если для вычисленной матрицы выполняется равенство, то оценка , соответствующая этой матрице, называется эффективной.

Эта оценка существует не всегда, т.е. в некоторых задачах найти ее нельзя. Однако, если она существует, то определяется методом максимального правдоподобия. Это положение доказывается в математической статистике. Более легко эффективные оценки получают в регрессионном анализе.

**Состоятельность оценки**

Одним из методов повышения точности оценки является увеличение числа измерений до сотен и тысяч. В связи с этим большое значение приобретает исследование асимптотических свойств оценок, получаемых при стремлении числа измерений *N* к бесконечности. Одним из таких свойств является состоятельность оценки, под которой понимают сходимость по вероятности оценки параметров к их истинному значению при числе измерений, стремящемся к бесконечности.

Рассмотрим сходимость по вероятности.

**Определение.** Последовательность случайных величин сходится по вероятности к некоторой константе С, если для любого

Поясним эту формулу. Распределение случайной величины выражается законом распределения, показывающим вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее заданного *V*. Если обозначим некоторое конкретное через (рис. 6), то .



Рис. 6. Функция распределения

Если имеем последовательность случайных величин то каждая из них характеризуется своим законом распределения (рис. 7).



Рис. 7. Функции распределения случайных величин

Неравенство | можно представить в виде:

, или , и , или .

Таким образом, указывает, что при сходимости по вероятности вероятность попадания значения случайной величины вне интервала [С-;С+] равна нулю при , т.е. значения попадают в интервал [С-;С+] с вероятностью 1 для любого . Это означает, что функция распределения *Р* является ступенчатой (рис. 8).



Рис. 8. Ступенчатая функция распределения

В математической статистике доказывается, что для сходимости по вероятности необходимо выполнение условий

.

Причем:

1. Все величины должны иметь нормальный закон распределения.
2. Случайные величины должны быть ограничены по модулю.

Мы рассмотрели понятие сходимости по вероятности случайной величины . Нам же необходимо определить условие сходимости по вероятности оценки неизвестного параметра к истинному значению при *N*, т.е. состоятельность оценки.

Значение оценки является случайной величиной, зависящей от значений и числа *N* компонент вектора наблюдений . Поэтому для сходимости оценки по вероятности к истинному значению (состоятельность оценки) справедливы правила, полученные для случайной величины . А именно:

* оценка должна быть несмещенной;
* оценка распределена по нормальному закону;
* оценка ограничена по модулю.

Выполнение этих правил позволяет при неограниченном увеличении числа измерений *N*  получать значения оценок со сколь угодно требуемой точностью.

К сожалению, на практике при решении сложных задач указанные требования, обеспечивающие состоятельность оценок, часто не выполняются вследствие того, что в математической модели объекта, для которого оценивают параметры, невозможно полностью учесть все факторы, влияющие на процесс. Поэтому ошибки оценки состоят из двух слагаемых:

где ошибка, соответствующая принятой системе допущений;

− ошибка, вызванная не учитываемыми в модели факторами.

При использовании состоятельного алгоритма погрешности по вероятности при , а либо сходится к какому-либо пределу, или расходится (рис. 9). Это может привести к увеличению погрешности оценки с увеличением числа измерений. Поэтому необходимо относиться осторожно к большому увеличению числа измерений.



Рис. 9. Погрешности оценки

Рассмотри погрешности оценок метода максимального правдоподобия, возникающие вследствие невыполнения принятых допущений.

1. Математическое ожидание погрешности измерений не равно нулю, а

.

Тогда погрешность оценки неизвестных параметров

Эта формула получается из зависимости, связывающей вариацию оценки с погрешностью измерений *V*.

1. Действительная корреляционная матрица погрешностей измерений отличается от теоретической. Обозначим действительную матрицу погрешностей . Тогда из выражения

получим корреляционную матрицу действительных погрешностей оценки

Рассмотрим решение приведенной в самом начале задачи оценки параметров движения объекта по данным измерений расстояний между пунктом наблюдений и объектом в разные моменты времени для случая, когда пункт находится в плоскости движения объекта. Оценку будем осуществлять методом максимального правдоподобия.

Необходимость в решении таких задач возникает в следующем случае. Требуется построить пункт или пункты наблюдения за космическими объектами для оценки по данным измерений какой-либо функции от параметров движения объекта (расстояние, радиальная скорость, угловое положение и т.д.), координат и скоростей объекта в некоторый момент времени. Считается, что вид уравнений движения известен. Прежде чем строить эту станцию, необходимо провести исследование по выбору измеряемого параметра (расстояние, угол ), обеспечивающего наименьшую погрешность оценки, а также вычислить погрешность оценки параметров. Ведь может оказаться, что выбранный для измерения параметр, схема измерений, метод оценки дают очень большую погрешность оценки, либо вообще не позволяют ее получить. Тогда надо искать другие пути решения задачи.

Моделирование задачи оценки параметров состоит из следующих подзадач:

* моделирование точного движения объекта;
* моделирование получения измерительной информации, искаженной помехами;
* вычисление оценки неизвестных параметров по данным измерений;
* вычисление корреляционной матрицы погрешностей оценки;
* сравнение полученной оценки значений параметров с их точным значением;
* выводы по результатам моделирования.

Вначале введем систему координат, в которой будут записаны уравнения движения объекта и заданы координаты измерительного пункта. Это будет центральная система координат *OXY* (рис. 10).



Рис. 10. Система координат

Координаты пункта равны:

,

где – угловая координата пункта; − радиус Земли.

Уравнения движения объекта запишутся в виде:

где – константа; .

Для интегрирования этой системы численным методом ее записывают в форме Коши.

Задаем количество *N* и моменты измерений.

Задав начальные условия для системы уравнений (начальные параметры движения *t*=0, ), интегрируем систему и запоминаем значения координат объекта в моменты - , (*i*=1, 2,…, *N*).

По полученным значениям , вычисляем расстояние от пункта до объекта:

Определяем вектор измерений

где – случайная величина с и заданной корреляционной матрицей .

Конкретные числовые значения случайной величины получаем, используя датчик случайных чисел.

Мы промоделировали процесс движения объекта и получения вектора измерений .

Теперь необходимо вычислить оценку параметров движения объекта в момент *t* = 0 по имеющимся измерениям .

Для этого необходимо задать начальные значения параметров объекта (значение первого приближения). В общем случае они должны отличаться от истинных точных значений. Величина подшагивания к оценке вычисляется по формуле

где ; *L −* матрица частных производных вектора измерений по оцениваемым параметрам ; – корреляционная матрица ошибок измерений; – вектор разности вектора измерений *R* и модели вектора измерений .

Для использования этой формулы осуществляем следующие действия:

1. Вычисляем матрицу , обратную матрице . Делаем это, используя процедуру обращения матрицы. Если матрица диагональна

то обратная равна

.

Матрица должна быть задана в условии задачи.

1. Вычисляем матрицу частных производных , используя уравнение движения объекта и метод конечных разностей. Индекс задает номер подшагивания, а номер компоненты. Для этого задаем начальные значения оцениваемых параметров на первом шаге вычислений, или вычисленное на предыдущем шаге . Используя величины вариаций оцениваемых параметров , которые заданы в исходных данных, задаем значение *j*-й компоненты (*j*=1, 2, …, ) вектора , а остальные компоненты равными , и интегрируем уравнения движения объекта при этих начальных условиях. В процессе интегрирования вычисляем значения вектора измерений математической модели. Вектор задает значение расстояний от объекта до пункта наблюдений в моменты времени проведения натурных измерений, вычисленных по принятой математической модели. Индекс *j* показывает, что расстояние вычислено при вариации *j*-й компоненты вектора . Задаем новое значение компоненты *j* (*j*=1, 2, …, *K*) вектора оцениваемых параметров и, интегрируя уравнения движения объекта, получаем, аналогично предыдущему, значения вектора измерений математической модели. По полученным данным вычисляем *j*-ю строку матрицы *L* производных по *j*-й компоненте вектора

.

1. Вычисляем вектор , равный разности вектора натурных измерений *R* и полученных по математической модели . Для этого задаем имеющееся значение вектора оцениваемых параметров и интегрируем уравнения движения объекта. Вычисленные значения расстояний от объекта до пункта в моменты измерений являются компонентами вектора .
2. Вычисляем произведение матриц .
3. Вычисляем обратную матрицу .
4. Вычисляем произведение матриц .
5. Вычисляем величину подшагивания и новое значение вектора оцениваемых параметров .

Полученное значение используется для следующего шага итераций. Вычисления прекращаются, если модули компонент вектора станут меньше заданных значений:

( *j* = 1, 2, …,).

Вычисленные значения являются оценками неизвестных параметров по вектору измерений *R*.

В конце вычисляем корреляционную матрицу погрешностей оценки вследствие погрешностей вектора измерений, характеризуемых корреляционной матрицей

Задача решена.

Используя корреляционную матрицу , можно решить задачу такого выбора моментов измерений , чтобы корреляционная матрица имела минимальные дисперсии. В этом случае погрешность оценки будет минимальной. Для этого необходимо решить задачу минимизации элементов матрицы на множестве возможных моментов измерений . Действительно, величина зависит от значений элементов матрицы *L*, которые, в свою очередь, зависят от моментов *t*. Таким образом,

.

Зададим некоторую скалярную функцию от дисперсии оценок, характеризующую качество системы в зависимости от погрешностей оценок

,

где элементы матрицы .

Это может быть , т.к. , или , где − некоторые коэффициенты. Максимизируя эту функцию на множестве возможных значений , получим значения времени замеров, дающих наилучшее качество работы системы в зависимости от моментов измерений. Вид функции *L* зависит от конкретной задачи.

# МЕТОД МАКСИМУМА АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ (Байесовский метод оценки параметров системы)

Метод максимального правдоподобия базируется только на измерительной информации, полученной в процессе проведения эксперимента.

В ряде случаев о векторе оцениваемых параметров  еще до проведения эксперимента имеются априорные данные, полученные из каких-либо физических соображений или предшествующих экспериментов. Целесообразно эту информацию о векторе  учитывать при определении оценок.

Вначале вспомним формулу Байеса для условных вероятностей для дискретного случая. Рассмотрим ее на следующем примере.

Задача**.** Имеется 2 одинаковые урны. В одной находится 5 белых шаров и 5 чёрных, а во второй 10 чёрных. Некто подходит к урнам с закрытыми глазами и наугад вынимает шар. Найти вероятность того, что шар был вынут из первой урны, второй, т.е. по результатам опыта уточнить вероятность того, что извлекли из первой или второй урн.

**Определение.** Обозначим термином «гипотеза *Н*1» – событие, состоящее в том, что черный шар вынут из первой урны, и «гипотеза *Н*2» , что вынут из второй. Извлечение черного шара обозначим событие A. Тогда формулы Байеса для оценки апостериорной вероятности извлечения черного шара из первой или второй урн (гипотез *Н*1, *Н*2) имеют вид:

где *P(A|Hi)* (*i=*1,2) – условная вероятность появления события *А* при выполнении гипотезы *Hi*(т.е. извлечения шара из *i*-й урны); *P(Hi)* (*i=*1,2) *–* вероятность выполнения гипотезы *Hi.*

Так как урн две, а шар вынимался из одной наугад, то вероятности, что вынут из первой урны или второй, равны:

Эти вероятности называются априорными (доопытными).

Найдем вероятности *P(A|Hi).* Если вынимаем шар из *i*-й урны, то вероятность, что шар черный

а если из второй, то

Подставляя в формулы Байеса, получаем:

Это уже апостериорные вероятности.

Таким образом, зная, что произошло событие *А* (вынут черный шар), мы уточнили вероятность извлечения шара из первой и второй урн.

Для первой вместо 1/2 стало 1/3, а для второй вместо 1/2 стало 2/3.

Мы рассмотрели пример для дискретного случая. Существует формула Байеса и для системы непрерывных случайных величин.

Обозначим, как и прежде, через вектор случайных величин, являющихся оцениваемыми параметрами, а через *R* – вектор случайных величин, являющихся измерениями.

Между случайными векторами  и *R* имеется статическая связь –

изменение ведет к изменению *R*. Поэтому вектора  и *R* характеризуются совместной функцией плотности вероятности *f*(, *R*). В случае если  и *R* размерности *i*, то графически функция совместной плотности может быть выражена в виде, представленном на рис. 11.



Рис. 11. Функция совместной плотности вероятности

Из совместной плотности вероятности можно получить условную плотность вероятности: это плотность распределения одной случайной величины при фиксированной другой. Обозначим ее , где *R* – фиксированная величина. Вычисляется она по формуле:

С другой стороны, имеем

Используя зависимости

получаем формулу Байеса

Функции плотности , могут вычисляться по формулам

или

где интеграл берется по всем компонентам вектора  или *R*.

Функция задает плотность вероятности значений оценки неизвестных параметров  при заданном векторе наблюдений. Наша задача состоит в нахождении такого, при котором максимальна.

Это значение  и будет оценкой  неизвестных параметров. Из формулы Байеса видно, что для максимизации функции плотности оценки необходимо максимизировать произведение функции плотности вероятности вектора наблюдений и функции плотности вероятности оценки , выбрав соответствующее , т.е.

=

на множестве .

Находящаяся в знаменателе функция не зависит от , поэтому ищется только максимум числителя. Из сказанного видно, что для того, чтобы воспользоваться этим методом, необходимо знать наряду с и априорную функцию плотности вероятности оцениваемых параметров.

Информацию о векторе  часто можно получить из предварительных расчетов или физических соображений.

Рассмотрим использование метода в случае, если векторы *R* и  распределены по нормальному закону. Запишем, как и в методе максимального правдоподобия, функцию в виде:

где *R* – вектор измерений, равный сумме точного значения расстояния до объекта и погрешности измерений *V*; Z− вектор значений расстояний, вычисленный с помощью математической модели.

Функция априорной плотности имеет вид:

Значения корреляционных матриц погрешностей *KV ,* , математического ожидания должны быть заданы.

Подставляя эти функции в формулу Байеса, получаем

где

Стоящие в показателе степени квадратичные функции являются положительно определенными, поэтому максимум достигается при минимуме функции аргумента :

В большинстве решаемых задач эта функция является гладкой и имеет единственную экстремальную точку. Поэтому производная имеет вид:

где *L* − матрица частных производных вектора по .

Оценку получаем из системы уравнений

или

Данная система является нелинейной, коэффициенты ее вычисляются, как и в методе максимального правдоподобия, численными методами, с использованием уравнения движения объекта. Решение ее осуществляют с помощью итерационного алгоритма, основанного, как и в методе максимального правдоподобия, на линеаризации вектора . Имеем

где компоненты вектора подшагивания.

Подставим линеаризованную зависимость в систему уравнений, обозначив матрицу первых производных, как и ранее, через *L*.

Решим его относительно

или

Мы получили выражение для очередного подшагивания при нахождении корней системы уравнений, являющихся оценками неизвестных параметров.

Полученная оценка  является оценкой по методу максимума апостериорной вероятности.

Найдем выражение для дисперсии оценки. Воспользуемся предыдущей формулой для вычисления вариации Поступим так же, как и при получении корреляционной матрицы для метода максимального правдоподобия.

Допустим, мы знаем для данного эксперимента точное значение

= .

Имеем разность

= *D* + *V* - ,

где *V* – вектор погрешности измерений.

Величина *D* - Z = 0 и = *V*.

Подставив это значение в формулу для вычисления подшагивания, получим

.

Получена зависимость для вычисления вариации оценки вследствие погрешности измерения. Эта вариация является погрешностью оценки.

Обозначим = .

Тогда внешнее произведение векторов погрешностей оценки равно

.

Воспользуемся симметричностью матриц ,

Корреляционную матрицу погрешностей можно будет записать так:

или

*=*

Из этой матрицы, как частный случай, получается для метода максимального правдоподобия.

Если при оценке методом максимума апостериорной вероятности правильно взяты априорные характеристики оценки , , то этот метод дает более точную оценку, чем метод максимального правдоподобия.

Если ,  заданы неверно, то оценка будет хуже. Однако при увеличении числа измерений до бесконечности байесовская оценка будет стремиться асимптотически к оценке методом максимального правдоподобия.

Порядок вычислений при проведении расчетов для получения байесовской оценки один и тот же, что и в методе максимального правдоподобия. Отличие состоит только в задании априорных характеристик ,  и формуле для вычисления .

Для того, чтобы найти правильную оценку в рассмотренных случаях используются методы, учитывающие весь вид функции плотности вероятности или так называемые интегральные методы. Одним из таких методов является метод условного математического ожидания .

# МЕТОД УСЛОВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО

# ОЖИДАНИЯ

Этот метод, называемый в литературе еще методом наименьших дисперсий, был разработан в трудах Колмогорова.

Рассмотренные ранее методы максимального правдоподобия и байесовский позволяют получить оценку из условия максимального значения соответствующих функций плотности вероятности. Это свойство функций не всегда удобно использовать в качестве условия получения оптимальной оценки.

Например, если функция многоэкстремальная, да еще имеет разнозначные максимумы, то усложняется процедура вычислений, нарушается условие единственности решения. Даже если функция плотности одноэкстремальная, но не симметричная, выбор оценки  из условия максимума не отражает истинной картины (рис. 12).



Рис. 12. Функции плотности вероятности

Для уяснения метода условного математического ожидания воспользуемся аналогией между плотностью вероятностей и плотностью массы тела в механике.

Плотность массы тела, аналогичная функции плотности вероятности, может достигать своего максимального значения в точках, не совпадающих с центром массы. Из механики известно, что центр масс тела – это такая точка, относительно которой тело имеет минимальные главные моменты инерции. Моменты инерции в механике по своему математическому смыслу совпадают со вторыми центральными моментами связи в теории вероятностей.

Условная плотность вероятности вектора оцениваемых параметров при заданном векторе измерений *R* имеет вид (формула Байеса):

где  и  вектора размерности *K.*

Составим функцию

где вектора размерности *K.*

Выражение задает сумму квадратов разностей текущего значения  и некоторого фиксированного. Функция *J* зависит от значения  и имеет минимум. Значение , задающее минимум функции  яавляется оценкой  по методу условного математического ожидания. Значение ошибки находим из необходимого условия минимума

или

Отсюда

Так как

то

 .

Мы получили оценку , вычисленную методом условного математического ожидания. Из формулы видно, что  является математическим ожиданием, получающимся при данном векторе измерений R. Аналогом полученной оценки  в механике является центр масс. Величина в этом случае является минимальной суммой дисперсий, аналогичной сумме моментов инерции в механике.

Действительно

Здесь вычисления осуществлялись следующим образом:

Оптимальность оценок в данном случае определяется уже не локальными свойствами функции плотности вероятности, а ее поведением во всей области измерения оцениваемых параметров .

Этим методом оценки целесообразно пользоваться в том случае, если функция плотности вероятности является несимметричной, многоэкстремальной.

В вычислительном отношении этот метод существенно отличается от рассмотренных ранее. Если в тех методах оценка получалась в результате решения системы нелинейных уравнений, то в этом случае для получения  необходимо вычислить многомерные интегралы. Осуществляют это, используя приближенные квадратурные формулы.

Рассмотрим простейший случай, когда апостериорная функция плотности вероятности принадлежит к нормальному закону.

Тогда , как и в байесовском методе, будет иметь вид

где

Величина оценки вычисляется по формуле

где

.

Функцию определяем по выражению

где *T* = ,

а

.

Если функция плотности симметрична, то получаемая методом условного математического ожидания оценка совпадает с оценкой максимального подобия.

Рассмотрим порядок вычислений при использовании этого метода оценки для случая, если по данным измерений *R* оцениваются значения двух параметров , являющихся начальными условиями системы дифференциальных уравнений.

Определим область в пространстве переменных , в которой считать отличной от нуля. Это позволит уменьшить область интегрирования, т.е. заменить границы на граничные числа. Для этого можем использовать характеристики

Коэффициенты *k*11 = , *k*22 = корреляционной матрицы характеризуют возможный разброс значений , относительно ,. В случае нормального закона распределения значения распределяются практически внутри интервала [; ].

Для других законов распределения можно взять гарантированную область, допустим [; ], либо провести исследование функции с целью определить, в какой области В результате мы получим область возможных значений, , , (рис. 13).



Рис. 13 Область возможных значений ,

Разобьем эту область на элементарные площадки размером . Задаем координаты центра площадки , (*i =* 1)*,* интегрируем систему уравнений при этих начальных условиях и определяем значения вектора *Z(*,. Вычисляем приближенные значения интегралов на элементарной площадке

*=*

*=*

*=*

Задаем новые значения и производим аналогичные вычисления. После вычисления для всей области возможных значений определяем значения интегралов

где П – число элементарных площадок, а затем значения

# РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотренные три метода оценки неизвестных параметров по данным измерений основаны на совместной обработке всей имеющейся измерительной информации. При большом числе измерений и сложной математической модели это приводит к трудоемким вычислениям и необходимости иметь быстродействующие ЭВМ. Облегчить эту ситуацию можно, разработав алгоритмы, позволяющие уточнять оценку неизвестных параметров по поступающей в текущей момент времени измерительной информации. Пояснить это можно на примере рассматриваемой задачи оценки параметров  движения объекта по измеренным расстояниям *R* до него.

Проводим некоторое число *l* измерений, достаточных для получения первого, самого грубого значения оценки . При поступлении следующего измерения новая оценка получается не путем обработки всех измерений , , а обработкой уже имеющейся оценки и нового вектора измерений . Этот алгоритм обработки измерений можно записать в виде:

) .

Алгоритмы такого вида называются рекуррентными. (Рекуррентность – свойство последовательности, заключающееся в том, что любой ее член может быть вычислен по значениям предыдущего или нескольких предыдущих). Использование рекуррентных алгоритмов позволяет:

* ослабить требования к памяти и быстродействию вычислителя;
* получать оценки  для текущего момента времени, а по нему определять вектор состояния системы на этот момент времени. Данное обстоятельство важно в случае, когда информация о состоянии системы используется в контуре управления объектом. Например: KA должен осуществить посадку на некоторую планету. Гравитационное притяжение которой известно с большой ошибкой. Для осуществления мягкой посадки надо знать скорость встречи KA с планетой, чтобы вовремя и на требуемое время включить тормозной двигатель для обнуления скорости в момент посадки. Аппарат может измерять свою высоту над планетой.

Рассмотрим решение этой задачи в общем виде. При движении КА в поле гравитационных сил инерциальные измерительные средства (акселерометры, интеграторы) не могут определить скорость КА под действием этих сил. Поэтому для определения скорости надо использовать значения измеренных высот (рис. 14).



Рис. 14. Схема измерений

Уравнения движения KA в плоском случае в центральном гравитационном поле имеют вид:

.

гравитационное ускорение

*,*

где скорости и координаты движения; *D* – расстояние до центра планеты; – масса планеты; гравитационная постоянная. Считается, что начало системы координат *OXY* находится в центре планеты.

Будем считать, что радиус планеты известен. Неизвестными являются масса планеты , координаты , скорости в момент времени , предшествующий или совпадающий с первым измерением . Всего пять неизвестных. Оценку их будем производить в следующей последовательности.

Осуществим 8…10 измерений высоты , достаточных для получения первой оценки , , , каким – либо методом, допустим, максимального правдоподобия. При получении следующего измерения *H* новую оценку параметров будем получать, используя предыдущую оценку и новый вектор измерения. Зная величины оценок , , , , можно прогнозировать, используя уравнения движения KA, координаты и скорости его встречи с планетой, а значит, время включения и работы тормозного двигателя.

Выведем зависимости для рекуррентного алгоритма. Для этого примем следующие допущения:

* погрешности измерений, произведенных в разные моменты времени, не коррелированы между собой. Это условие означает, что корреляционная матрица погрешностей измерений является диагональной;
* вектор измерений связан с вектором оцениваемых параметров линейной зависимостью. Обозначим вектор оцениваемых параметров размерности *K*, как и раньше, через , вектор измерений *R*, математическую модель вектора измерений Z. В случае нашей задачи , , ,, ,,…,}. Тогда второе допущение для модели вектора измерений можно выразить зависимостьюZ = A, где

.

матрица коэффициентов влияния, которые можно выразить как функции времени.

Это допущение вроде бы ограничивает класс задач, для которого можно использовать рекуррентный алгоритм, т.к. в большинстве задач зависимость между вектором оцениваемых параметров и вектором измерений не линейна. Однако можно осуществить линеаризацию исходной задачи, что позволяет применить данный метод. Как это сделать, будет показано в дальнейшем. Рассмотрим первый способ рекуррентной оценки.

При оценке параметров по методу максимального правдоподобия их находят из условия минимума функции

которое записывается в виде

или .

Величина вычисляется из системы уравнений

*.*

Обозначим b = , тогда получим из уравнения

или .

Так как матрица , то и . Обозначим

коэффициенты матрицы *A*, соответствующие *i* измерениям, а = коэффициенты матрицы *A*, соответствующие *i*+1 измерению. Тогда = .

Соответствующую матрице обратную матрицу можно представить с помощью блочных матриц в виде



или 

где – элементы обратной матрицы.

Тогда для (*i+*1) измерения имеем:



= =

=

Так как то

Обозначим вектор измерений с *i*+1 компонентами

= = .

Тогда имеем:



=

= .

Так как то

+ .

Полученные выражения для показывают, что для вычисления оценки по *i*+1 измерению из уравнения

= , (

матрицы можно вычислить, используя аналогичные коэффициенты для оценки по *i* измерениям. Необходимо только вычислить добавки к этим матрицам, соответствующие очередному (*i*+1) измерению. Как и в методе максимума апостериорной вероятности, в рекуррентном алгоритме предыдущая информация (измерение) используется как априорная информация об оцениваемом параметре.

Рассмотрим применение полученного алгоритма при решении задачи определения параметров движения KA и массы планеты по измерениям высоты. Как уже говорилось, этот алгоритм справедлив при линейной зависимости между оцениваемыми параметрами , , , и измеряемым – высотой над поверхностью планеты. Так как в нашей задаче эта зависимость не линейна и связана решением дифференциального уравнения, то необходимо преобразовать зависимость в алгебраическую и осуществить линеаризацию.

В курсе вычислительной математики использовалась линеаризация в методе Ньютона решения одного или системы нелинейных уравнений. Вспомним, как это делалось в случае одного уравнения *f*(*x*) = 0.

Для получения решения брали некоторую начальную точку по возможности ближе к корню уравнения *f*(*x*) = 0, вычисляли *f*() , производную и заменяли нелинейную зависимость *y* = *f*(*x*) линейной в окрестности (рис. 15).

Важным моментом в осуществляемой замене было задание первой опорной точки , относительно которой осуществлялась линеаризация.



Рис. 15. Линеаризация в методе Ньютона

В нашей задаче с KA необходимо линеаризовать, т.е. выразить линейной функцией от оцениваемых параметров , , , уже не просто алгебраическую зависимость, а функцию – значение высоты, зависящую от решения дифференциального уравнения движения KA. Поэтому в качестве опорной точки у нас уже опорное решение дифференциального уравнения и соответствующие ему значения высот в заданные моменты времени. Для получения этого решения необходимо задать числовые значения оцениваемых параметров , , , . Осуществить это можно двумя способами.

Первый – задать их на Земле. Значения массы планеты с какой-то погрешностью могут быть вычислены на Земле по анализу орбиты планеты. Значения скоростей и координат KA можно узнать, просчитав траекторию перелета KA к этой планете. Однако этот путь дает большие погрешности, т.к. не учитывает влияния малых космических тел, магнитных полей, вспышек на Солнце и т.д. на параметры движения.

Второй способ – это определить примерные значения необходимых параметров по данным измерений высоты при вхождении KA в гравитационное поле планеты, когда он находится еще далеко от нее и есть время для проведения расчетов. Для этого осуществляют 10…15 измерений высот *H* и, используя уравнения движения KA в гравитационном поле планеты, оценивают, допустим, методом максимального правдоподобия, опорные параметры = , , , для некоторого момента времени . Используя эти параметры, интегрируют уравнения движения KA, вычисляют значения опорных высот математической модели (высота обозначена Z, опорная будущих измерений, а также вычисляют значения частных производных

,, , , ,

(*i =* 1,2…,*l*)*,* при , , ,

Здесь *l* – число измерений высоты KA, которые будут использованы для оценки по рекуррентному алгоритму.

Это второй способ определения параметров опорной траектории выгодно отличается от первого тем, что базируется на новой информации о массе планеты и движении KA, полученной по данным измерений высоты.

Вычисленная при полученных , , , траектория и является опорной траекторией, а значения высот – опорными высотами. Относительно их будем осуществлять линеаризацию.

При движении KA на участие оценки параметров по рекуррентному алгоритму проводят измерение высоты KA в момент времени . В результате получают высоту , отличную в общем случае от . Напишем линейную зависимость между оцениваемыми параметрами и выстой Z, вычисляемой по математической модели

= + () ,

Здесь

= .

Это линейная часть разложения в ряд Тейлора.

Оценку параметров осуществляем, минимизируя функцию

J = ,

где вектор измерений высоты; *Z* – вектор высот, вычисленный по модели.

Подставим *Z* в квадратные скобки:

– () = + – .

Значения нам известны для данной опорной траектории. Поэтому, обозначив *R = + ,* мы можем написать:

J = ,

что полностью соответствует допущению о линейной связи вектора оцениваемых параметров с новым вектором наблюдений и можем использовать рекуррентный алгоритм оценивания. Отсюда следует, что .

Для использования рекуррентного алгоритма в конце первого участка оценивания , , , вычисляют матрицы

= ,

где

=

значения частных производных высот, вычисленных по модели движения KA для моментов времени *(j =* 1,2,*…,v)* измерения высот, используемых для получения оценок , , , , задающих опорную траекторию; *R = + –* новый вектор измерений, полученный из вектора измерений высот *H* на первом участке измерений, значений этих высот , вычисленных по модели, и произведения частных производных этих высот и опорных параметров . Эти матрицы , используют для получения новой оценки на втором участке при получении новых измерений высоты. Для этого по полученному очередному значению высоты = (*i* = 1,2,…,*l*) вычисляют значения

– + +

где – значение высоты, вычисленное по модели движения KA для данного момента измерений при параметрах в момент , равных , , , .

Частные производные вычислены для момента при таких же параметрах.

Новые значения матриц , вычисляют по выражениям

= ,

где = ; величина, обратная дисперсии погрешности измерения высоты в момент Она задается разработчиками высотометров.

Новые значения оцениваемых параметров вычисляют из системы уравнений

Рассмотрим другой рекуррентный алгоритм, имеющий вид

= *F*(.

В предыдущем алгоритме оценки получены зависимости

, = +

= .

Существует следующая формула для обращения матрицы. Если матрицу *A* можно записать

*A* = *B* + *CDE*,

где *B* и *D* − неособенные матрицы, то

где

.

Для получения необходимо вычислить , для чего используем формулу обращения.

В нашем случае

*A* = , .

Тогда имеем

,

Теперь вычислим

+

=+ –

Преобразуем второе слагаемое:

.

Тогда имеем:

–

Подставим вместо его значение. Получим

,

–

–

− .

Сокращая подобные члены в квадратных скобках и используя зависимость

получим окончательную формулу

где .

Кроме этих выражений на каждом шаге вычисляется

.

Из полученных формул видно, что новая оценка получается путем добавления к предыдущей оценке линейной функции от которая представляет собой разницу между измеренным значением и прогнозируемым с помощью предыдущей оценки

Алгоритмы позволяют получать оценки неизвестных параметров по мере поступления измерительной информации . Начальные значения , для первого шага определяют либо по априорной информации о векторе , либо оценивают их по нескольким первым измерениям методом максимального правдоподобия.

# ДИНАМИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Во многих задачах необходимо оценивать вектор текущих параметров состояния объекта на момент измерения некоторого вектора наблюдений, являющегося функцией этих параметров.

Решение этой задачи в принципе может быть осуществлено рассмотренными выше методами. Для этого по каждому новому измерению осуществляют уточнение оценки параметров, являющихся начальными условиями на момент системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение объекта. Получив эту оценку, интегрируют дифференциальные уравнения от момента до текущего момента измерения. Полученные значения переменных и являются требуемыми величинами. Недостатком такого способа является необходимость интегрирования каждый раз уравнений поведения объекта. Если текущие параметры состояния объекта используются в контуре управления этим объектом, то необходимость интегрирования ведет к задержке в выдаче команды, что влияет на качество управления. В этой связи вызывает интерес алгоритмы, позволяющие осуществлять оценку текущих параметров по данным измерения.

В предыдущих задачах мы обозначили через вектор начальных условий в момент системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы. Поэтому обозначим вектор состояния системы в момент времени через .

При разработке алгоритма примем следующие допущения:

1. Математическая модель исследуемой системы линейна и имеет вид

= ,

где – заданная матрица, причем .

1. Вектор измерений в момент является суммой линейной функции компонент вектора состояния и погрешности измерений:

= .

Здесь – заданная матрица для момента времени . В частом случае вектор может состоять из одной компоненты.

1. Математическая модель вектора измерений имеет вид

= .

1. Погрешности измерений , в разные моменты времени, а также разные компоненты одного вектора погрешностей , (*k*некоррелированы:

*M*[] = 0, *M*[] =

где – диагональная матрица.

1. Математическое ожидание погрешности измерений

*M*[] = 0.

Для оценки параметров текущего состояния воспользуемся алгоритмами предыдущего рекуррентного оценивания, которые имеют вид

,

,

.

Этот алгоритм позволяет оценить значения вектора начальных условий для переменных, описывающих поведение системы. Если использовать условие предыдущей задачи, то – это значения скоростей и координат в момент , вычисляемые по данным измерений в моменты ,, …,.

В этом алгоритме по значениям текущего измерения определяем параметры в уже прошедший момент времени . Однако этот алгоритм можно использовать и для другой задачи: по данным измерений текущего вектора определить параметры движения для момента времени , большего (рис. 16).



Рис. 16. Оценка неизвестных параметров

на будущий момент времени

Эту оценку можно осуществить, так как известна зависимость, связывающая значения в разные моменты времени. Обозначим через оценку на момент времени , полученную по (*i +* 2) измерениям , ,…,, а через − эту оценку, полученную по (*i +* 1) измерению , ,…, Тогда, используя предыдущий алгоритм рекуррентной фильтрации и учитывая, что в модели динамической фильтрации вектору соответствует матрица получим

Здесь обозначено: – матрица для вычисления оценки по (*i*+1) измерению из системы линейных уравнений

=

– матрица для вычисления оценки по всем (*i*+2) – измерениям из системы линейных уравнений

= ;

– корреляционная матрица погрешностей измерений в момент времени .

Таким образом, индекс (*i+*1)обозначает, что матрица вычислена для оценки неизвестного вектора параметров движения в момент , а знак « » (штрих), что эта матрица вычислена по измерениям, предшествующим моменту . Теперь надо найти зависимость между оценкой и оценкой по данным измерений параметров движения на момент , а также между матрицами и .

Для этого вспомним, что в методе максимального правдоподобия была получена формула дисперсии оценки

,

или в нашем случае

,

вычисляемая тем же способом, который используем сейчас. Отсюда ясен физический смысл матриц ,,. Они характеризуют дисперсии векторов оценок , , . При выводе формул было принято допущение

,

или в новых обозначениях

.

Отсюда имеем формулу для прогнозируемой оценки

.

Из этой же зависимости получим выражение для корреляционной матрицы погрешности прогноза. Математическое ожидание погрешности прогноза

=

Для корреляционной матрицы погрешности прогноза имеем

=

Так как , то окончательно получим

.

Если – корреляционная матрица оценки , то является корреляционной матрицей оценки . Отсюда, учитывая равенство , получаем

=

Используя эти два равенства, имеем алгоритм динамической фильтрации

= [ –

= + ,

= ,

-

Из полученных формул видно, что для получения оценки параметров движения в момент времени необходимо знать оценки параметров в момент времени .

Покажем, как начать вычисления по алгоритму, так как он не само начинающийся, нельзя использовать эти формулы для вычислений по первому измерению.

Для этого посмотрим, какие данные нужны при использовании алгоритма. Это матрица , являющиеся корреляционной матрицей погрешностей оценки , полученной по измерениям значения R в моменты времени ,, …,Зная ее, мы вычисляем . Для оценки необходимо знать оценку на предыдущем *i*-м шаге.

Таким образом, чтобы начать вычисления по алгоритму динамической фильтрации, используя данные измерений, необходимо знать оценку определяемых параметров и корреляционную матрицу погрешностей этой оценки на предыдущем шаге.

Вычислить их можно, допустим, методом максимального правдоподобия по нескольким начальным измерениям вектора  *R*.

Полученный алгоритм справедлив для системы, поведение которой и вектор измерений описывается линейными зависимостями. Однако он может использоваться и для нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями. В этом случае необходимо осуществить их линеаризацию. Делают это так. Для нелинейной системы уравнений

описывающей движение объекта, находим расчетную траекторию. Это такая траектория, относительно которой будет происходить реальное движение (рис. 17).



Рис. 17. Линеаризация нелинейной зависимости

Для этой траектории запоминаем . Теперь линеаризуем наше уравнение. Значение переменной в момент времени зависит от значения в момент времени . Можно записать

= + (-),

= (-).

Значения частных производных вычисляем, интегрируя уравнения

задавая поочередно вариации компонент вектора (для и компонент ( для

Обозначим матрицы производных

= ,

Тогда можно записать для математической модели процесса движения и измерений

= , = ,

где = - , = - , - .

Эти уравнения связывают вариации , параметров траектории (решения уравнения) относительно опорной для разных моментов времени , и вариации вектора измерений и параметров .

Зная матрицы для всей траектории, вычисляя по измерениям значение вариации = - , можно оценить величины по алгоритмам динамической фильтрации. Зная оценку вариаций , находят оценку текущих параметров

= +

# ДИСКРЕТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

В предыдущем материале рассматривали модели, в которых случайная помеха – шум, действовала только на вектор измерений. В уравнении же, описывающем поведение объекта, шум отсутствует.

На самом деле на все системы действуют случайные факторы, влияющие на ее поведение. Необходимость их учета или неучета зависит от того, как это сказывается на качестве задачи, решаемой системой. Если неучет ведет к значительному ухудшению качества, то случайные факторы надо учитывать. При этом возможны два пути. Первый – это разобраться в механизме возникновения случайных помех и учесть их действие на систему в у равнениях ее поведения. В этом случае усложняется уравнение поведения системы, но зато можно использовать разобранные ранее методы.

Второй путь – это учитывать действие на систему случайных факторов. Для этого надо определить вероятностные характеристики факторов и для оценки требуемых параметров по данным измерений использовать специальные алгоритмы, и, в частности, алгоритмы фильтра Калмана.

Пусть математическая модель системы задана зависимостями

= +, = + (*i =* 1,2…)*.*

Здесь, как и ранее, – вектор размерности, описывающий состояние системы (в частном случае – движение) в момент времени ; – вектор измерений размерности *l,* получаемый в момент времени ; – случайные вектора – шум с нулевым математическим ожиданием.

Относительно случайных векторов предполагается, что они распределены по нормальному закону и не коррелированы, т.е.

*= 0, = 0, = 0,* (*i<>*)*, = =*

Как известно из теории вероятностей, матрицы , являются симметричными, положительно определенными. Кроме того, математическое ожидание , равно нулю.

Необходимо, используя вектор измерений , модели вектора измерений и вектора состояний, оценить текущее значение вектора состояния .

Будем считать, что известна несмещенная оценка математического ожидания вектора состояния системы на момент времени . Тогда, используя модель состояния объекта = +, получим математическое ожидание априорной оценки – прогноза:

+

или = .

Вектор можно считать априорной информацией о значении вектора в момент времени . Фактическое значение вектора отличается от априорного вследствие наличия шума .

Найдем выражение для корреляционной матрицы погрешности вектора априорной информации .

Имеем

= .

Используя зависимости для , получаем

+ –

= ]+]+

+(]+].

Так как вектора и не коррелированы, то

=,

где = = ].

Таким образом, на момент имеем априорную информацию о векторе состояния .

.

Теперь используем вектор измерений и модель вектора измерений

.

Функция условной плотности вероятности для полученного вектора измерений имеет вид как и в методе максимального правдоподобия

Функция плотности вероятности априорного значения равна

Воспользуемся методом максимума апостериорной вероятности. Тогда оценка будет вычисляться из условия обращения в максимум функции условной плотности вероятности (формула Байеса):

Максимум ее достигается, как и в формуле Байеса, при максимуме функции

который соответствует минимуму квадратичной функции

*.*

Для нахождения оценки , задающей минимум этой функции, вычислим производные ее по и приравняем к нулю.

Так как = [-

=[],

то

Вектор решения этой системы уравнений и будет требуемой оценкой. Для нахождения решения преобразуем систему:

++

(

Оценка определяется зависимостью

Преобразуем выражение для .

Воспользуемся для этого, как и ранее, соотношением

=,

где .

Подставим эту зависимость в формулу для Получим

= (

=

Преобразуем второе слагаемое

Подставляя его в формулу для и вынося за скобки общий множитель получаем

Подставив в квадратные скобки выражение для Получим

*.*

Окончательно имеем

*.*

Из этого уравнения видим, что если является математическим ожиданием, то и – тоже математическое ожидание.

Найдем зависимость для вычисления корреляционной матрицы погрешности оценки Предположим, что известно точное значение оценки , которое находится из системы уравнений

Погрешность оценки – разброс относительно точной оценки

будет зависеть от вариации измерений обусловленных погрешностью измерений , а также вариации прогнозируемого (априорного) значения оценки. Величину прогнозируемого значения оценки вычисляем по формуле

=.

Она может изменяться вследствие отличия оценки от истинного, т.е. наличия а также от влияния шума . Поэтому система уравнений в вариациях для вычисления погрешности оценки имеет вид

Разрешим эту систему относительно .

(+()

или

=[()].

Обозначим

,

().

Тогда корреляционная матрица

Матрицу можно вынести из – под символа вычисления математического ожидания, т.к. ее элементы постоянны, т.е. не являются случайными величинами. Вычислим выражение в квадратных скобках

(

=

+

Вычислим математическое ожидание от слагаемых, учитывая, что так как матрица симметрична:

*=*

*+)*

Так как и некоррелированы между собой, то

[

[

[

Имеем зависимости

[, [[]=,

поэтому

=

Таким образом имеем

Так как

=

то

.

Теперь можно получить выражение для корреляционной матрицы

Так как матрица *G* симметрична, то

=.

Используя полученные ранее выражения для вычисления обратной матрицы, получаем

= ,

где .

Таким образом, получили рекуррентный алгоритм линейного дискретного фильтра Калмана

*=*

позволяющий по значениям , уравнениям объекта и наблюдений оценить текущие параметры , их корреляционную матрицу при действии на объект и измерительную систему случайных шумов.

# НЕПРЕРЫВНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

В некоторых технических системах измерения компонент

= , *(i = 1,2,…)* производятся так часто, что их можно считать практически непрерывными. Это позволяет при построении алгоритма фильтрации заменить последовательность дискретных векторов непрерывной вектор-функцией . Рассмотрим задачу получения оценки по измеренному значению при следующих допущениях:

1. Используется линейная модель системы вида

*,*

где – заданные матричные функции; – случайная функция, представляющая шум, действующий на систему, описывается белым шумом; *–* случайная функция, представляющая погрешность измерений, являющаяся белым шумом.

1. Случайные функции , взаимно не коррелированы. Кроме того, отсутствует корреляция между значениями одной и той же функции в разные моменты времени, т.е. корреляционные функции для являются дельта функциями. Математические ожидания равны нулю.
2. Заданы начальная оценка параметра = и ее корреляционная матрица .
3. Измерения вектора проводятся для некоторых фиксированных моментов . Промежуток времени между двумя соседними временами измерений будем считать постоянным.
4. Оценку требуется определить для момента времени проведения текущего измерения.

Эта задача эквивалентна построению дискретного фильтра Калмана при условии, что имеем соответствия:

, , .

Полагая, что промежуток мал, и отбрасывая малые члены высших порядков, можно написать:

+

или

)

где *I* − единичная матрица.

Для вектора измерений имеем

Сравнивая эти зависимости с математической моделью дискретного фильтра Калмана

*,,*

видим, что они одинаковы, если имеем следующие соответствия:

Для дальнейших выводов используем формулы дискретного фильтра Калмана

= +

*=*

Вычислим аналоги корреляционных матриц для непрерывного случая. Им соответствуют корреляционные матрицы

[.

Символами , обозначили диагональные корреляционные матрицы компонент векторов белых шумов.

Рассмотрим подробнее понятие белый шум. Каждую выборку случайного процесса, являющегося белым шумом, можно представить в виде суммы бесконечного числа гармоник

где значение частоты принимает все значения вещественной оси от до +. Наличие той или иной гармоники с частотой будет зависеть от величин коэффициентов . Так как в математической модели математическое ожидание шумов равно нулю, то величина характеризует отклонение от среднего, а величины коэффициентов – вклад в это отклонение гармоники с частотой . Для характеристики наличия в шуме гармоник различных частот используют понятие спектральной плотности . Спектральная плотность характеризует вклад гармоники каждой частоты в дисперсию случайного процесса (рис. 18).

Спектральная плотность случайного процесса, у которого есть ограниченное число частот, представляет некоторую функцию, похожую на функцию плотности вероятности. Если процесс имеет все частоты одинаковой амплитуды (белый шум), то его спектральная плотность представляет прямую линию, параллельную оси частот.



Рис. 18. Спектральные плотности различных случайных процессов

Так как площадь под функцией спектральной плотности характеризует дисперсию процесса, то получается, что белый шум имеет бесконечную дисперсию, что физически нереально. Белый шум является некоторой математической абстракцией. Используется широко в анализе автоматических систем, случайных процессов он по той причине, что случайный процесс, являющийся белым шумом, некоррелирован.

На практике любая система функционирует в определенном диапазоне частот, поэтому используют постоянную спектральную плотность, заданную в этом диапазоне частот (рис. 19).



Рис. 19. Спектральная плотность

В этом случае дисперсия процесса уже ограничена, а корреляционная функция имеет вид дельта функции (рис. 20). Величина ее основания равна а величина дает интервал корреляции, т.е. интервал времени, вне которго процесс считается некоррелированным. Внутри интервала процесс является коррелированным. Интеграл от корреляционной функции по есть величина постоянная для данного , характеризующая интенсивность шума



Рис. 20. Корреляционная функция

Вычисленные значения корреляционных матриц для шумов и , можно представить в виде:

где − соответственно интенсивности шумов и *W*, зависящие только от текущего времени.

Таким образом, аналогом корреляционной матрицы дискретного фильтра является матрица непрерывного фильтра, а матрицы соответственно .

Найдем остальные аналоги. Обозначим соответствующую матрице матрицу непрерывного фильтра через , матрице – матрицу , − матрицу , а −

Матрица определяется зависимостью

*)+*

Перемножая матрицы и отбрасывая члены, содержащие , получаем

Обозначим +, тогда

Найдем выражение для *S*.

*S* = +

Слагаемое является величиной высшего порядка малости по сравнению с . Поэтому можно записать

.

Найдем зависимость для . Подставляя аналоги для , в формулу для , получим

+

Перемножая и отбрасывая слагаемые с , получаем

или

(

Найдем формулу для оценки.

= *))*

Перемножая и отбрасывая слагаемые с , получим

=*)*

или =

Используя уравнения для и , запишем зависимости

Так как то, переходя к пределу в выражениях

получим дифференциальные уравнения фильтра Калмана

Решение этой системы при начальных условиях

= позволяет оценить значение вектора переменных и вычислить корреляционную матрицу погрешностей оценки по вектору наблюдений для системы при действии случайных шумов на саму систему и вектор измерений.

Полученное уравнение для корреляционной матрицы является нелинейным матричным дифференциальным уравнением Риккати.

# РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Основная задача регрессионного анализа – создание математических моделей объектов или явлений на основе экспериментов или наблюдений за этими объектами или явлениями. Он является одним из наиболее широко распространённых статистических методов и позволяет строить математические модели и производить статистический анализ результатов. При построении математических моделей используются различные варианты метода наименьших квадратов (МНК), который был разработан Лежандром и Гаусом. Соединил МНК со средствами статистического анализа полученных результатов Гальтон, проводя антропологические исследования, он же ввёл слово регрессия (от латинского движение назад). Он обнаружил явление регрессии, заключающееся в том, что у очень высоких родителей дети были меньшего роста.

В настоящее время регрессионный анализ используется в технике, медицине, биологии, экономике, физике и др.

Существует 2 схемы регрессионного анализа:

1. Уравнение регрессии определяется как функция безусловного математического ожидания результата измерений зависимой переменной при детерминированном значении независимых переменных.
2. Во второй схеме независимые переменные считаются случайными и уравнение регрессии ищется как функция условного математического ожидания зависимой переменной.

**Определение.**Регрессионный анализ – это МНК плюс статистическая обработка результатов измерений.

Мы будем рассматривать только первую схему с линейными по оцениваемым коэффициентам уравнениями. Предположим, что существует абсолютно точная модель изучаемого процесса и есть независимые переменные влияющие на изучаемый процесс. Обозначим их Но т. к. точная модель неизвестна, неизвестны все переменные, от которых зависит изучаемый процесс, то при разработке математической модели используется вектор:  , где *m <T* – вектор известных и наиболее сильно влияющих аргументов. Влияние не учитываемых и неизвестных аргументов (факторов) можно рассматривать как действие некоторой системы случайных величин на исследуемую переменную. Поэтому, при проведении измерений зависимой переменной, при одних и тех же значениях вектора *х*, но в разных экспериментах будут получены разные значения измеряемой величины.

В регрессионном анализе в качестве математической модели процесса принимают математическое ожидание зависимой переменной *y* при заданных аргументах *х*

где *M* − символ математического ожидания.

В этом случае действительное значение функции можно представить в виде математической модели:

− это случайная величина, действие которой на основании центральной предельной теоремы эквивалентно действию системы случайных величин, которые не учитываются в модели. Принимают, что распределена по нормальному закону с некоторой , с условием .

Существует большее число различных регрессионных моделей, определяемых конкретным видом функции , в которых всегда присутствуют неизвестные коэффициенты которые надо определить по экспериментальным данным. Задача определения числа и характера независимых переменных, коэффициентов , вида уравнения регрессии решается в самом начале регрессионного анализа, путём рассмотрения физической природы изучаемого явления. Модели могут быть линейными и нелинейными по оцениваемым параметрам.

Пример нелинейной модели:.

Пример линейной модели: .

Очень часто модель берется в виде степенной функции:

.

Под линейной моделью понимаем модель, линейную по оцениваемым коэффициентам .

Мы будем дальше рассматривать модели, линейные по оцениваемым параметрам. В этом случае величину y можно записать в виде

,

где  − оцениваемые параметры,  − некоторые функции от независимых переменных, не включающие. Эти функции называют регрессорами. − вектор аргументов, использующийся в модели исследуемой системы, процесса.

В модели системы или процесса

.

значения являются регрессорами.

Рассмотрим основные положения классического регрессионного анализа для линейных систем. Пусть было проведено *n* наблюдений выходной величины *y* при различных значениях аргументов *х* (табл.1).

*Таблица 1*

**План эксперимента**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № эксперимента | *x* | *y* |
| 1  2  …  *N* | …  …  … … … …  … | … |

Значение, получаемых в эксперименте величин, можно представить в виде формулы:

,

где  − регрессоры, вычисленные при заданных значениях аргументов.

Примем следующие допущения: случайные величины распределены по нормальному закону с одинаковой для всех измерений дисперсией и нулевым математическим ожиданием и не коррелированы между собой.

Матрица регрессоров для таблицы 1 имеет вид:



Будем считать, что значение  выбрано так, что ранг матрицы *F* равен числу *K* неизвестных коэффициентов *а*. Поскольку результат наблюдения есть случайные величины, то вычислить точное значение коэффициентов *аi* нельзя, а можно получить только их оценки. Для получения оценок используется МНК. Прогнозируемое значение зависимой переменой вычисляем по формуле , где − матрица регрессоров, − вектор оцениваемых параметров.

В МНК неизвестные коэффициенты находим из условия минимума

где − полученные в эксперименте числовые значения, а − эти же значения, вычисленные по модели при используемых в эксперименте значениях аргументов. Используем необходимое условие минимума.

Отсюда получим

или

Если *N = K* в матрице *F* , то

− называют информационной матрицей, она должна быть невырождена.

Полученные оценки неизвестных коэффициентов являются случайными величинами, поэтому необходимо исследовать свойства этих оценок.

1. *Смещенность или несмещенность*.

Имеем

Тогда

В результате мы получили, что оценка несмещённая.

1. *Эффективность оценки*.

Найдем зависимости для корреляционной матрицы погрешностей оценки коэффициентов *a*

.

Предположим, что есть другая несмещенная оценка

где *Н* – детерминированная, в общем случае неквадратная матрица.

Имеем для этой другой оценки

Так как по условию оценка  несмещенная, то

и

При оценке по методу наименьших квадратов коэффициенты находим по формуле

где аналог матрицы *Н*. Обозначим разницу между ними

Найдем корреляционную матрицу оценки

Имеем Тогда

=

Найдем зависимость для вычисления *CF*.

Получим окончательно

*+*  или

Матрица положительно определена, поэтому имеем

где знак равенства справедлив при нулевой матрице *С*.

Таким образом, получили, что корреляционная матрица погрешностей оценки коэффициентов уравнения регрессии по методу наименьших квадратов наименьшая в классе линейных несмещенных оценок, т. е. оценка является эффективной − точность оценки выше любой другой в этом классе.

3. *Состоятельность оценки.*

Покажем, что оценка коэффициентов регрессии состоятельна, то есть при стремлении числа измерений к бесконечности оценки по вероятности сходятся к точным значениям, то есть

где оценка, полученная при *N* измерениях по матрице *,* – малое положительное число.

Для доказательства подставим формулу для *y* в формулу для оценки коэффициентов

Необходимо показать, что при второе слагаемое стремится к нулю. Воспользуемся условием сильной регулярности матрицы , т. е. будем считать, что

*,*

где *М* – невырожденная матрица *K* x *K.*

Тогда

*=*

Поэтому имеем

Таким образом, приоценка коэффициентов стремится к точному значению.

4. *Дисперсия предсказанного значения*.

Допустим имеем матрицу регрессоров для прогноза. Подставив ее в уравнение регрессии получим прогнозируемое значение.

*,*

где

Тогда

5. *Если регрессионная модель выбрана правильно*, т. е.и математическая модель ситемы, процесса  *,* то несмещенную оценку дисперсииопределяют по выражению

*,*

где − вектор размерностиизмеренных значений выходной переменной при изменении значений аргумента, *−* значение выходной переменной, вычисленной по математической модели с использованием оценки коэффициентов размерности *K.* Докажем это.

Имеем

Найдем математическое ожидание произведения

Вычислим *.* Так как матрица *А* симметрична, тоИмеем

Матрица, для которой выполняется условие *АА = А,* называется идемпотентной.

Таким образом,

так какнекоррелированы между собой.

Преобразуем последнее выражение, используя зависимость

*A = I – .*

Сумма диагональных элементов единичной матрицы *I* размера *N*x*N* равна *N.* Найдем сумму диагональных элементов второго слагаемого. Обозначим. Тогда можно записать

Для диагональных элементов матрицы *Т* имеем:

Сумма диагональных элементов определяется формулой

Из последней зависимости видно, что сумма диагональных элементов в произведениях матрициодинакова.Норавна единичной матрице размера *K*x*K*, поэтому сумма ее диагональных элементов равна *К.* Таким образом,

и

Таким образом, оценканесмещенная. Коэффициент равен числу имеющихся измерений *N* минус число *K* коэффициентов *,* вычисляемых по данным измерений. Он называется числом степеней свободы. Если вид математической модели выбран неверно, то формула дляне может служить для оценки дисперсии *.*

Отношение

являетсяраспределением с степенями свободы.

### Проверка адекватности регрессионной модели

Метод наименьших квадратов обеспечивает минимизацию отклонений измеренных значений *y* от предсказанных при заданной структуре модели, однако часто неизвестно, соответствует ли выбранная структура действительному процессу или явлению и исследователь не располагает информацией, достаточной для решения данного вопроса. В этом случае осуществляется перебор моделей разного вида и останавливаются на той из них, которая лучше всего согласуется с экспериментальными данными. Если значение *у* (отклик) зависит от одного аргумента, то результаты эксперимента можно изобразить графически, построив семейство этой функции, вычисленных по разным математическим моделям и выбрать наиболее подходящую. При большом числе факторов такой подход уже невозможен, поэтому для проверки адекватности модели используются другие методы. Их основу обычно составляют соображения, связанные с сущностью изучаемого явления, опыт и интуиция исследователя. Если структуру модели не удаётся определить из сущности процесса, то пользуются методом перебора различных функций. В этом случае начинают с самой простой модели, линейной, относительно факторов *xi* , затем проверяют, достаточно ли хорошо предсказанные по модели значения переменной  согласуются с результатами наблюдения. Для такой проверки разработаны специальные статистические процедуры, называемые, проверкой адекватности модели. Если первоначально выбранная модель окажется неадекватной, т. е. предсказанные по ней значения плохо согласуются с результатом наблюдения, то структуру модели меняют, проводят оценку коэффициентов новой модели и значений откликов. Эта проверка адекватности производится до тех пор, пока не получат хорошее согласование результата эксперимента с моделью. При выборе структуры модели стремятся к тому, чтобы она была как можно проще, т. е. включала как можно меньше коэффициентов. Это так называемый принцип экономичности модели. Сокращение числа коэффициентов облегчает процедуру их оценивания и вычисления по модели. Получаемые оценки неизвестных коэффициентов являются случайными величинами. Поэтому может возникнуть ситуация, когда равные нулю коэффициенты в реальном процессе и соответствующей ему абсолютно точной модели при их оценке по результатам экспериментов в силу действия случайных величин получается не равные нулю. В этой связи возникает задача проверки гипотезы о равенстве нулю некоторых из регрессионных коэффициентов, так называемая проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Другая проблема, которая интересует исследователя – это точность получаемых оценок, т. е. мера их отличия от своих истинных значений. Для ответа на этот вопрос вычисляются доверительные интервалы и области. Доверительным интервалом называется отрезок, центром которого служит сама оценка  и для которого заранее задана вероятность, где − уровень значимости, того, что отрезок включает точное значение оцениваемой величины. Доверительные области строят в пространстве всех коэффициентов регрессии, они имеют смысл, аналогичный смыслу доверительных интервалов. Можно построить доверительные интервалы для значения отклика, показывающие, насколько значение, предсказанное по модели, отличается от своего математического ожидания.

### Анализ значимости уравнения регрессии

Оценить значимость уравнения регрессии – это установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между y и x экспериментальным данным. Может получиться, что в качестве аргументов выбраны факторы, от которых выходная характеристика не зависит, либо в модели учтены не все влияющие факторы. Для оценки значимости уравнения регрессии проверяют нулевую гипотезу, заключающуюся в том, что коэффициенты уравнения регрессии  являющиеся множителями y регрессоров, зависящих от *x,* равны нулю. Если эта гипотеза не отвергается, то зависимость между *х* и *y* отсутствует, а значит уравнение не отражает реальный процесс и необходимо подбирать новую зависимость. Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что процесс зависит от используемых в модели факторов, однако остаётся неясным вопрос о качестве модели, все ли значимые факторы учтены и не учитываются ли незначимые. Ответ на этот вопрос получают путём сравнения различных моделей и анализа значимости их коэффициентов. Для проверки нулевой гипотезы используется основное положение дисперсионного анализа о разбиении суммы квадратов отклонений выходной переменной на две суммы: одну , характеризующую влияние аргументов, а вторую остаточную, характеризующую влияние неучтённых факторов. Очевидно, чем меньше влияние неучтённых факторов, тем лучше математическая модель соответствует реальному процессу, т. е. вариация y в основном объясняется влиянием аргумента x. Обозначим среднее арифметическое результатов измерений

.

Тогда в дисперсионном анализе, при условии, что для каждого уровня фактора есть несколько наблюдений зависимой переменной, доказывается следующая формула:

где

разброс, характеризуемый экспериментом;

− разброс, характеризуемый уравнением регрессии;

− это разность между экспериментом и моделью; − значения переменной, полученные в эксперименте и вычисленные по модели соответственно.

Из этой зависимости видно, что слагаемое даёт рассеивание выходной переменной, объясняемое уравнением регрессии. Величина отражает влияние на рассеивание выходной переменной всех тех факторов, которые учитываются уравнением регрессии. Если величины и соизмеримы, а существенно меньше , то это значит, что уравнение регрессии хорошо задаёт изменение выходной переменной, а доля не учитываемых в уравнении факторов мала. Если же и одного порядка, то это свидетельствует, что доля не учитываемых в уравнении факторов велика и модель плохо отражает исследуемый процесс. Величина является распределённой с *K – 1* степенью свободы, так как  зависят от *K* случайных коэффициентов  и имеется одна связь между вследствие зависимости

.

Величина есть  − распределённая с *N –K*  числом степеней свободы, так как есть *K* связей случайных величин, получаемые через коэффициенты .

Величина есть − распределение с *N – 1* числом степеней свободы.

Видно, что число степеней свободы для равно сумме числа степеней свободы для .

Для использования этих величин при оценке качества уравнения регрессии используется коэффициент детерминации (мера определённости)

Из этой зависимости видно, что чем меньше (доля, обусловленная неучтёнными в уравнении факторами), тем больше этот коэффициент. Максимальное его значение, равное 1, будет в случае . Минимальное значение, равное нулю, означает, что уравнение не описывает исследуемого процесса. Величина *R* называется выборочным коэффициентом множественной корреляции, т. к. задаёт корреляционный коэффициент между и , т. е. степень линейной статистической связи между наблюдаемым значением и вычисленным по модели. Коэффициент *R* можно использовать только в том случае, если число опытов *N* больше числа коэффициентов *K*. Если *N = K*, то число уравнений равно числу измерений и числу неизвестных коэффициентов. Вычисленные из этой системы уравнений коэффициенты  будут такими, что выполнится равенство , т. е. аппроксимирующая функция пройдёт через измеряемые точки. В этом случае, что соответствует детерминированной зависимости между *y* и регрессорами. Однако, если провести ещё один опыт к этим *N* измерениям, то нет гарантии, что эта точка будет лежать на кривой регрессии. После вычисления коэффициента *R* возникает вопрос, можно ли считать, что он получился отличным от нуля только из-за случайных возмущений. Это сводится к проверке гипотезы о том, не равно ли нулю фактическое значение множественной корреляции , а *R* − это оценка действительного значения . Для проверки этого берут отношения:

где

− это оценка дисперсии .

Используя эти зависимости и формулу для получим

Так как и есть  распределение соответственно с *K* −1 и *N – K* степенями свободы, то *F* есть функция распределения Фишера c *K* −1 и *N – K* степенями свободы. Значимость коэффициента множественной корреляции проверяется как равенство дисперсий в следующей последовательности:

1. Вычисляем , и по ним и
2. Задаем уровень значимости и вычисляем число степеней свободы *K* −1 и *N – K.*
3. В таблице распределения Фишера находим критическое значение: *K* −1, *N – K*).
4. Вычисленное значение *F* сравниваем с критическим . Если, то коэффициент множественной корреляции значим, его нельзя объяснить только действием случайных факторов. Если , то полученный коэффициент незначим, нулевая гипотеза принимается и делается вывод, что модель не объясняет рассеивания относительно среднего, т. е. плоха. Незначимость коэффициента множественной корреляции свидетельствует о том, что зависимость выходной переменной от включённых в модель регрессоров слаба или вовсе отсутствует. Это возможно по двум причинам:
5. В модель не были включены некоторые из сильно влияющих факторов, их влияние проявилось в остаточной сумме , тогда как регрессия отразила только некоторые второстепенные факторы и сумма оказалась относительно малой. Такой результат получается часто при исследовании сложных объектов, в которых только часть факторов доступна для измерения, а некоторые из наиболее важных независимых переменных остаются вне поля зрения экспериментатора.
6. Незначимый коэффициент множественной корреляции может быть в том случае, когда в модель включаются все влияющие факторы, но её структура выбрана неверно, например, объект описывается полиномом 2-й степени, для математической модели выбран полином 1-й степени, но с теми же аргументами. Сама по себе величина *R* недостаточна, чтобы принять решение о том, какая модель лучше, необходимо учитывать степени свободы *N* и *K.*

### Проверка гипотезы о значимости коэффициентов

### регрессии

После того, как на основании коэффициента множественной корреляции выбрана структура модели, целесообразно проверить, значимы ли все коэффициенты регрессии. Может получиться, что в уравнении учитываются несуществующие факторы и отличие их от нуля вызвано только действием погрешности эксперимента и вычислений. Учёт в модели несуществующих или несущественных факторов ведёт к увеличению погрешности математической модели. Определение значимости коэффициентов регрессии осуществляется посредством проверки статистической гипотезы. Для проверки гипотезы о неравенстве нулю коэффициентов  формирует статистику, в которую входит оценка неизвестного коэффициента:

где оценка дисперсии *i* – го коэффициента. Оценка дисперсии написана потому, что мы не знаем истинного среднеквадратического отклонения шума . Формула для корреляционной матрицы погрешностей оценки имеет вид

.

Обозначим коэффициенты матрицы через .

Тогда

,

где − оценка дисперсии погрешности по данным измерений и результатам модели.

Другая формула для получения оценки величины оценки заключается в следующем. Задают фиксированные значения аргументов и проводят *l* опытов при одних и тех же значениях аргументов. Вследствие случайных ошибок в каждом опыте измерений результаты опытов будут различными. По этим опытам вычисляем

, .

Здесь *yi* − значение выходной величины, вычисленное по модели при заданных значениях аргументов.

Вычисляем , затем по таблице для распределения Стъюдента и числа степеней свободы , вычисленной первым способом, *N – K,* а для второго *l* −1, для заданного уровня значимости  находят критическое значение . Если то коэффициент  незначим и его не надо использовать в модели регрессии. Если , то его нельзя объяснить действием случайных факторов, он значим и его можно использовать в модели. При проверке значимости надо иметь в виду, что она может быть не слишком точной из- за коррелированности оценок коэффициентов уравнения регрессии, которое характеризуется величиной . Чем меньше коррелированность, тем точнее проверка значимости. Наибольшая точность будет в случае, если все внедиагональные элементы . Осуществить это можно соответственно выбором элементов матрицы *F* , если есть возможность организовать активный эксперимент. Такой план называется ортогональным. При его использовании все коэффициенты оцениваются независимо друг от друга. Включение или исключение какого – либо коэффициента в модели , в этом случае, не влияет на точность оценки других параметров.

### Построение доверительных интервалов

### для коэффициентов регрессии

Получаемые оценки коэффициентов регрессии являются точечными. Однако при исследовании может возникнуть вопрос о том, насколько эти точечные оценки могут отличаться от соответствующих им истинных значений. Для ответа на это вопрос строят доверительнее интервалы.

Доверительным интервалом случайной величины называют интервал с границамив который с наперед заданной вероятностью заключено истинное значение *.*

В соответствии с принятыми допущениями регрессионного анализа оценки регрессионных коэффициентовимеют нормальное распределение. В этом случае отношение

имеет распределение Стьюдента. Число степеней свободы зависит от того, как оценивают величинув формуле *= .*

Если

то число степеней свободы *N – K.*

Величинуможно оценить повторными опытами. В этом случае число степеней свободы в распределении Стьюдента равно *l –* 1*.*

По таблице распределения для заданного уровня значимости и числа степеней свободы находят *,* что позволяет определить интервалв котором с вероятностьюнаходится тонное значение коэффициента уравнения регрессии. Если при оценке коэффициентов регрессии используется неортогональное планирование, то коэффициенты будут коррелированными и величина доверительного интервала для будет зависеть от значения .

### Общая схема расчёта при классическом

### регрессионном анализе

1. На основе априорной информации выбирают предварительную структуру модели.
2. Используя экспериментальные данные и математическую модель, получают с помощью МНК оценки коэффициентов уравнения регрессии.
3. Вычисляют результат дисперсионного анализа ,
4. Вычисляют коэффициент множественной корреляции *R* и проверяют его значимость. При незначимом *R* изменяют модель, включая новые факторы или изменяя структуру, если коэффициент значим, то можно считать модель адекватной. Может возникнуть ситуация, когда коэффициент значим у разных моделей одного эксперимента. В этом случае выбирают ту модель, в которой наибольший коэффициент множественной корреляции с учётом числа степеней свободы.
5. После выбора модели проверяют значимость коэффициентов. Если есть незначимые, их исключают из модели и если планирование неортогональное, оценивают новые коэффициенты. Зная их вычисляют , проверяют значимость коэффициента множественной корреляции. Проверяют значимость её коэффициентов.
6. Если коэффициенты значимы, то строят доверительные интервалы.

# 

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в учебном пособии материал можно использовать при разработке и анализе систем различной физической природы и разработке их математических моделей. В учебном пособии приведены основные принципы анализа сложных процессов и систем, позволяющие наиболее полно учесть все возможные ситуации, могущие возникнуть при их функционировании и повлиять на качество решения задачи. Приведены основные сведения из теории вероятностей и математической статистики, а также матричной алгебры, используемые при получении математических моделей сложных стохастических систем на основе наблюдений за их поведением. Рассмотрены различные методы получения математических моделей систем и процессов, а также получение расчетных алгоритмов для реализации полученных математических моделей на ЭВМ.

# 

**Приложение**

**Примерный перечень контрольных вопросов к зачету**

1. Понятие системы, его эволюция.

2. Виды систем, их компоненты.

3. Характерные особенности систем.

4. Задачи системного анализа.

5. Принципы системного анализа.

6. Что такое синтез системы, анализ.

7. Методы синтеза системы.

8. Методы анализа системы.

9. Многокритериальные задачи в системном анализе.

10. Использование Парето-оптимального множества при оптимизации многокритериальных систем.

11. Случайные величины, их характеристики, корреляция случайных величин.

12. Закон распределения случайной величины, характеристики, получаемые с его помощью.

13. Получение случайной величины, распределенной по требуемому закону.

14. Линеаризация нелинейной зависимости.

15. Решение нелинейной системы алгебраических уравнений.

16. Решение линейной системы алгебраических уравнений.

17. Численный метод вычисления производных функции.

18. Что такое оценка случайной величины?

19. Что такое смещенная и несмещенная оценка?

20. Что такое эффективность оценки?

21. Что такое состоятельность оценки?

22. Как можно использовать свойство состоятельности оценки для повышения точности работы измерительной системы?

23. Виды моделей систем, их информационные свойства.

24. Получение оценок коэффициентов математической модели системы методом наименьших квадратов.

25. Получение оценок коэффициентов математической модели системы методом наименьших квадратов с весовыми коэффициентами.

26. Что дает введение весовых коэффициентов в метод наименьших квадратов?

27. Из каких этапов состоит оценка коэффициентов математической модели системы методом линейного регрессионного анализа?

28. Чем отличается линейный регрессионный анализ от метода наименьших квадратов?

29. Какие допущения принимаются при оценке параметров методом максимального правдоподобия?

30. В чем суть метода максимального правдоподобия. Вывести формулы метода.

31. Как решается уравнение правдоподобия?

32. Какая информация учитывается в Байесовском методе оценки параметров модели системы?

33. Вывести формулы Байесовского метода оценки параметров модели.

34. Можно ли получить оценки параметров модели системы Байесовским методом, равные оценкам по методу максимального правдоподобия?

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1*. Перов А. И.* Статистическая теория радиотехнических систем/ А. И. Перов. - М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.

2. *Синицын И. Н.* Фильтры Калмана и Пугачева/И. Н.Синицын.- М.: Логос, 2007. – 450 с.

3. *Онучин А. П.* Экспериментальные методы ядерной физики/ А.П. Онучин. – Новосибирск: НГТУ, 2010. -336 с.

4. *Магнуc Я. Р.* Эконометрика. Начальный курс/Я. Р. Магнуc, П. К. Катышев, А.А. Пересецкий.- М.: Дело, 2007. -504 с.

5. *Радченко С.Г*. Методология регрессионного анализа: монография/С. Г. Радченко – Киев: Корнийчук, 2011. -376 с.

# СОДЕРЖАНИЕ

[Введение 3](#_Toc448272338)

[Основные положения системного анализа 3](#_Toc448272339)

[Основные сведения из теории вероятностей и математической статистики 11](#_Toc448272340)

Моменты второго порядка 14

Нормальный закон распределения 17

[Датчики случайных чисел 17](#_Toc448272341)

[Основные сведения из теории матриц 23](#_Toc448272342)

Операции с блочными матрицами 25

Обращение произведения матриц 26

Внешнее произведение векторов 26

Решение системы линейных уравнений 26

Дифференцирование квадратичной формы 26

[Линеаризация дифференциальных уравнений](#_Toc448272343) [28](#_Toc448272344)

[Метод максимального правдоподобия 31](#_Toc448272345)

[Точность оценки](#_Toc448272355) 36

Эффективность оценок41

[Состоятельность оценки](#_Toc448272355) 44

[Метод максимума апостериорной вероятности](#_Toc448272346)  [(Байесовский метод оценки](#_Toc448272347)  [параметров системы) 52](#_Toc448272348)

[Метод условного математического ожидания](#_Toc448272349) [59](#_Toc448272350)

[Рекуррентные алгоритмы фильтрации 64](#_Toc448272351)

[Динамическая фильтрация 75](#_Toc448272352)

[Дискретный фильтр Калмана 81](#_Toc448272353)

[Непрерывный фильтр Калмана 87](#_Toc448272354)

[Регрессионный анализ 93](#_Toc448272355)

[Проверка адекватности регрессионной модели 102](#_Toc448272356)

[Анализ значимости уравнения регрессии 103](#_Toc448272357)

[Проверка гипотезы о значимости коэффициентов](#_Toc448272358)

[регрессии 107](#_Toc448272359)

[Построение доверительных интервалов](#_Toc448272360)

[для коэффициентов регрессии 109](#_Toc448272361)

[Общая схема расчёта при классическом](#_Toc448272362)

[регрессионном анализе 110](#_Toc448272363)

[Заключение 111](#_Toc448272364)

Приложение [112](#_Toc448272365)

Библиографический список114